PRESTE MUITA ATENÇÃO

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(0)\,\delta(t)\,dt =$$

$$= f(0)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt = f(0)$$

(TRATA-SE DE UM NÚMERO - VALOR DA FUNÇÃO NA ORIGEM - E NÃO DE UM DIRAC COMO ATRÁS)

PELAS MESMAS CONSIDERAÇÕES:

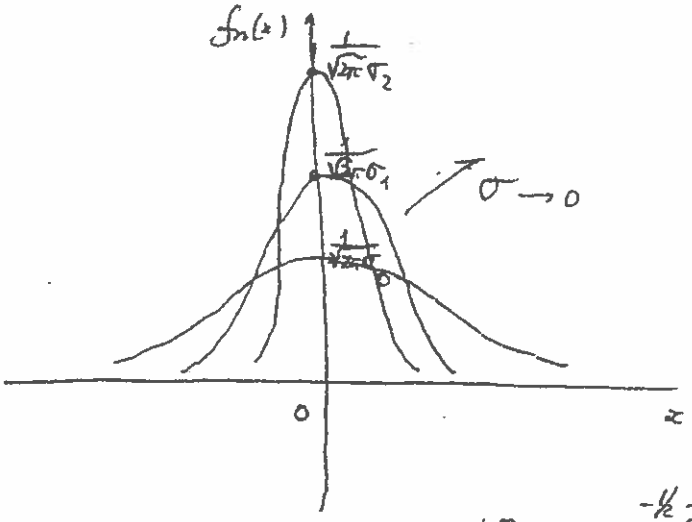
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$$

NOTE-SE QUE A DISTRIBUIÇÃO DE DIRAC É PAR:

$$\delta(-t) = \delta(t) \qquad \text{(LIMITE DE FUNÇÕES PARES)}$$

LOGO PODE SER, POR EXEMPLO, GERADA COMO LIMITE DE UMA SUCESSÃO DE FUNÇÕES DE GAUSS (PROBABILIDADE) QUANDO O DESVIO PADRÃO DESTA DISTRIBUIÇÃO TENDE PARA ZERO

$$\delta(x) = \lim_{\sigma\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}}$$



$\sigma_0 > \sigma_1 > \sigma_2$

$A = 1$

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}} = 1$$

APÊNDICE 2:

OPERAÇÃO DE CONVOLUÇÃO

DEFINIÇÃO

$$h(t) = f(t) \otimes g(t) = g(t) \otimes f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\, f(t-\tau)\, d\tau$$

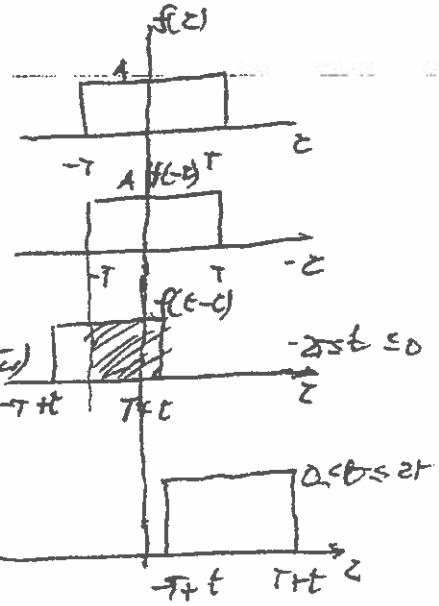
(comutatividade)

AUTOCONVOLUÇÃO

$$h(t) = f(t) \otimes f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, f(t-\tau)\, d\tau$$

EXEMPLO DE APLICAÇÃO:

$$f(t) = \begin{cases} A & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

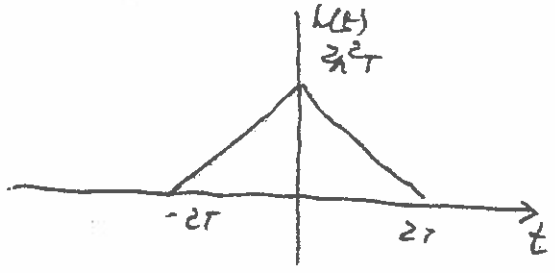


$$h(t) = f(t) \otimes f(t) = \begin{cases} 0 & t \le -2T \text{ (não há sobreposição das funções)} \\ \int_{-T}^{T+t} A \cdot A\, d\tau = (t+2T)A^2 & -2T \le t \le 0 \\ \int_{-T+t}^{T} A^2 d\tau = (-t+2T)A^2 & 0 \le t \le 2T \\ 0 & t \ge 2T \text{ (volta a não haver sobreposição das funções)} \end{cases}$$

$h(0)$ = MÁXIMO DA FUNÇÃO DE AUTOCONVOLUÇÃO

$$h(0) = 2A^2T$$

A convolução de 2 pedestais é um triângulo de largura igual ao dobro da largura de cada um dos pedestais



Atinge um máximo na origem (máximo da sobreposição)

$A_p = 2AT$

$A_p = 2AT$ $\qquad A_{triang} = \frac{1}{2} 2A^2 T \cdot 4A = 2AT \cdot 2AT^2 = 4A^2T^3$

OUTRAS PROPRIEDADES DA CONVOLUÇÃO

1) O Dirac é o elemento neutro da operação de convolução

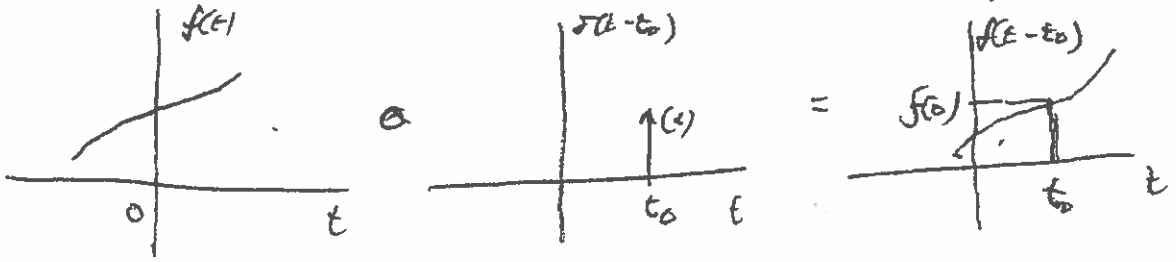
Temos:

$$\delta(t) \otimes f(t) = f(t) \otimes \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau = f(t)$$

2) Convolvir $\delta(t-t_0)$ com uma função (PELAS PROPRIEDADES DO DIRAC)

$f(t)$ corresponde a transladá-la de t_0 unidades — operação de translação

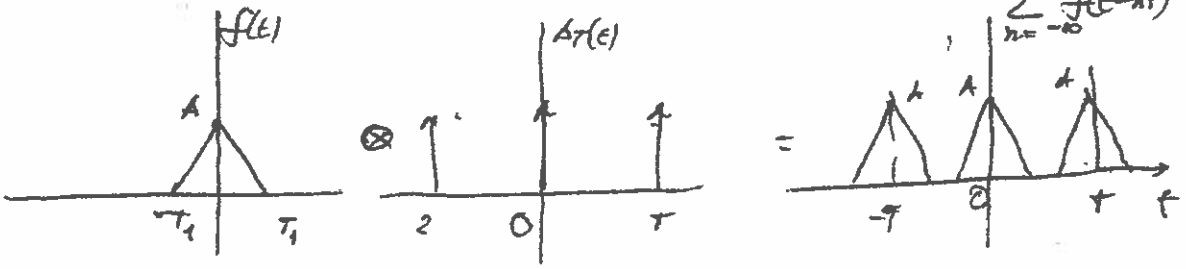
$$f(t) \otimes \delta(t-t_0) = f(t-t_0) \qquad \text{(fácil de provar)}$$



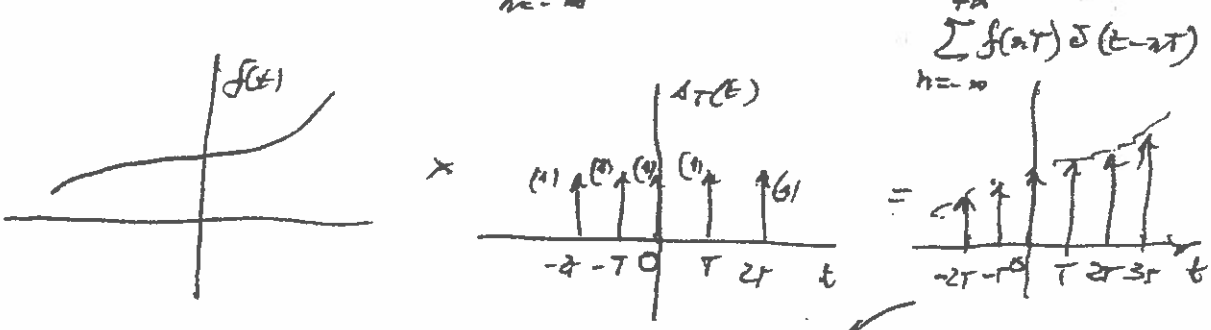
3)
$$f(t) \otimes \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) = f(t) \otimes \Delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t-nT)$$

trem de Dirac, pente de Dirac ou função de amostragem

(cria a partir de uma função dada a função periódica, de período T, dela resultante.



4) $f(t) \times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)\,\delta(t-nT)$



(Deiac's de diferentes amplitudes)

5) Transformada da convolução de 2 funções

Se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ e

$g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$

$h(t) = f(t) \otimes g(t) \longleftrightarrow H(\omega) = F(\omega) \cdot G(\omega)$

(esta propriedade é muito importante quer do ponto de vista teórico quer prático)

6) Transformada de produto no domínio do tempo

$$h(t) = f(t) \cdot g(t) \longleftrightarrow H(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) \otimes G(\omega)$$

Multiplicar no domínio do tempo é convolver no domínio das frequências e vice-versa (a menos do factor $1/2\pi$). É a base de suporte de todos os sistemas físicos caracterizados por uma função de transferência no domínio das frequências.

SINAIS E SISTEMAS

DURAÇÃO : 3 HORAS

1ª PROVA DISSERTATIVA

05-05-2012

I) a) ESBOCE GRAFICAMENTE A FUNÇÃO DISCRETA $f[n]$ DADA POR:

(2.0)

$$f[n] = \begin{cases} 2^{n+3} \cdot u[-5-n] & \\ 0 & -5 < n < 0 \\ 3/2 & 0 \le n \le 4 \\ -n & 5 \le n < 8 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{n-9} \cdot u[n-8] & \end{cases}$$

(1.) CALCULE E EFECTUE UM ESBOÇO GRÁFICO (INDICANDO PONTOS CARACTERÍSTICOS) DO ACUMULADOR DA FUNÇÃO $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} f(k)$

b) ESTUDE A ESTABILIDADE E A CAUSALIDADE DE UM SISTEMA LTI CUJA RESPOSTA IMPULSIONAL É DADA POR:

(1.75)

$$h[n] = 3^{-n-5} \cdot u[-n+4]$$

JUSTIFIQUE CONVENIENTEMENTE AS RESPOSTAS

c) DETERMINE, CASO EXISTA, O PERÍODO DA FUNÇÃO RESULTANTE DA SOMA DOS SINAIS $f_1(t)$ CONTÍNUO

(1.25)

$$f_1(t) = 4 - 3\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) - 5\sin\left(\pi t\right)$$

E $f_2[n]$ DISCRETO

$$f_2[n] = \cos\left[\frac{3\pi}{5}n\right]$$

JUSTIFIQUE CONVENIENTEMENTE A RESPOSTA

II) CONSIDERE OS SINAIS $x(t)$ E $h(t)$ REPRESENTADOS NA FIG. 1

(2.0)

DETERMINE E REPRESENTE GRAFICAMENTE O SINAL RESULTANTE DA CONVOLUÇÃO DOS 2 SINAIS. DEVERÁ INDICAR OS PONTOS MAIS CARACTERÍSTICOS

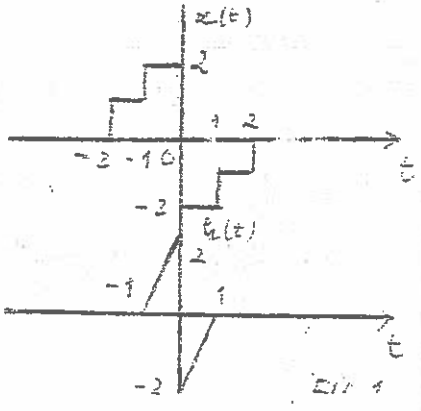


FIG. 1

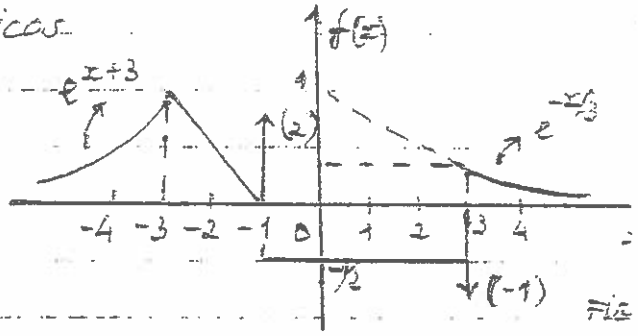
SINAIS E SISTEMAS

EXAME DE RECURSO 11-02-2011

DURAÇÃO: 3h 30m

NOTE BEM: EM TODAS AS REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS DEVE INDICAR OS PONTOS MAIS CARACTERÍSTICOS.

I) A) DETERMINE E REPRESENTE O INTEGRAL INDEFINIDO DA FUNÇÃO $f(x)$ REPRESENTADA NA FIG. 1.



Fig

B) DETERMINE A CONVOLUÇÃO DAS FUNÇÕES $x[n]$ E $h[n]$ DISCRETAS, DADAS POR:

$$x[n] = 3^n u[-n-1] + 3^{-n} u[n-1]$$

($x[n]$ DÁ O VALOR 0 PARA $n=0$)

E $h[n] = u[n+2] - u[n-2]$.

($u[n]$ É O DEGRAU DE HEAVISIDE DE ALTURA 1)

EFECTUE UM ESBOÇO GRÁFICO DA FUNÇÃO RESULTANTE DA CONVOLUÇÃO. QUAIS SÃO, CASO EXISTAM, OS VALORES DE n PARA OS QUAIS OCORRAM O MÁXIMO E O MÍNIMO DA CONVOLUÇÃO?

II) A) DETERMINE A CONVOLUÇÃO DA FUNÇÃO TRIANGULAR ($t_4(t)$ - DE LARGURA 8 E ALTURA 1) REPRESENTADA NA FIG. 2 COM A FUNÇÃO

$$g(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$$

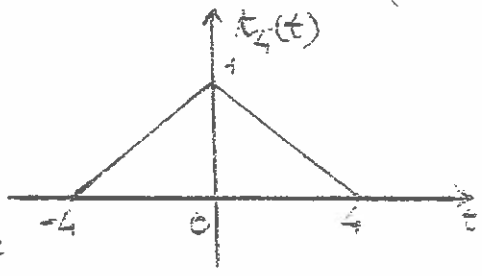


Fig. 2

B) DETERMINE A TRANSFORMADA DE FOURIER DA FUNÇÃO:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \le t \le 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

III) CONSIDERE O SINAL $f(t)$ (DENOMINADO VULGARMENTE DENTE DE SERRA EM ELECTRÓNICA; MATEMATICAMENTE É A MANTISSA DE t) REPRESENTADO NA FIG. 3.

SINAIS E SISTEMAS

EXAME ÉPOCA NORMAL 29-06-2011

DURAÇÃO: 3H. 30 m

I) a) DIGA, JUSTIFICANDO CONVENIENTEMENTE A RESPOSTA, SE O EXISTE UM LTI CUJA RESPOSTA IMPULSIONAL É:

$$h[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + (1.01)^n u[1-n]$$

É CAUSAL E/OU ESTÁVEL

b) REPRESENTE GRAFICAMENTE A FUNÇÃO DISCRETA DEFINIDA POR

$$x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n-2} & n \leq -1 \\ 0 & -1 \leq n \leq 4 \\ n/2 & 5 < n \leq 8 \\ 0 & 8 < n \leq 10 \\ 1/2 & 10 < n < 15 \\ 3^{-n+14} & n \geq 15 \end{cases}$$

DETERMINE O SEU ACUMULADOR E EFECTUE O SEU ESBOÇO GRÁFICO INDICANDO OS PONTOS MAIS CARACTERÍSTICOS.

c) i) DETERMINE A T.F DO SINAL DISCRETO

$$f(t) = e^{-|t|}$$

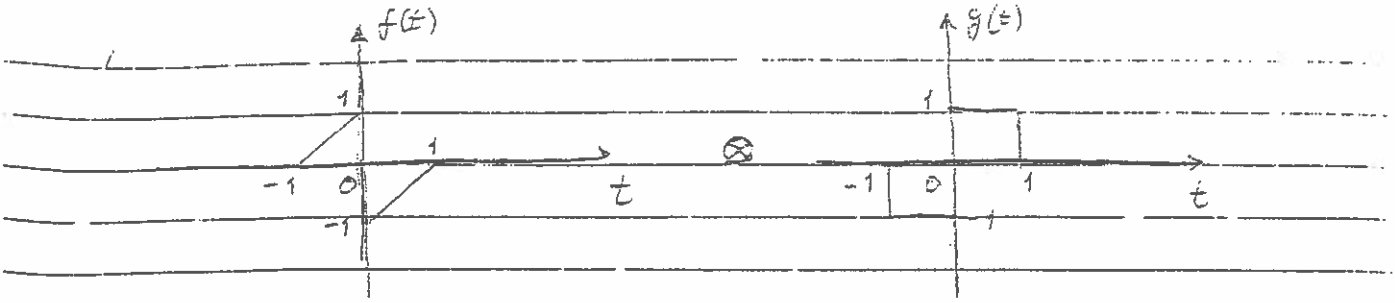
ii) USANDO UMA APROPRIEDADE ADEQUADA DETERMINE A T.F DE

$$g(t) = t \cdot f(t)$$

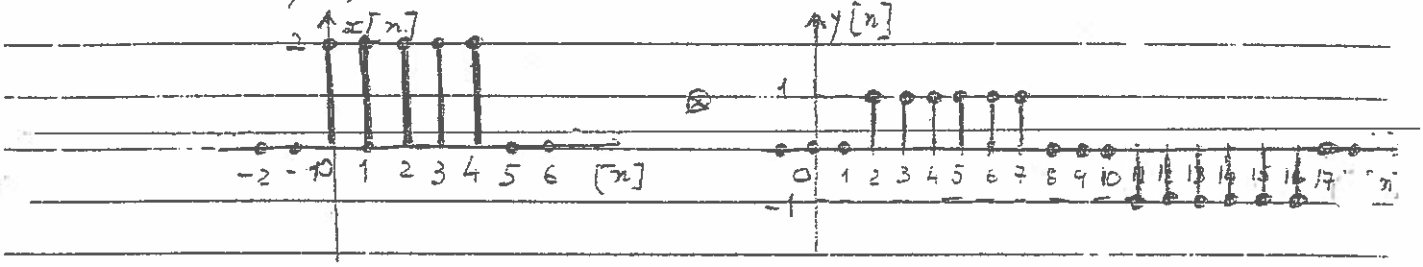
iii) USANDO A PROPRIEDADE DA DUALIDADE E O RESULTADO DE ii) DETERMINE A T.F DE

$$h(t) = \frac{4t}{(1+t^2)^2}$$

II) DETERMINE E EFECTUE UM ESBOÇO GRÁFICO (INDICANDO OS PONTOS MAIS CARACTERÍSTICOS) DA CONVOLUÇÃO DAS FUNÇÕES $f(t)$ E $g(t)$ REPRESENTADAS NA FIG. 1



III) EFECTUE A CONVOLUÇÃO DAS FUNÇÕES DISCRETAS $x[n]$ E $y[n]$ REPRESENTADAS NA FIG. 2. EFECTUE UM ESBOÇO GRÁFICO DA CONVOLUÇÃO, INDICANDO OS VALORES MAIS CARACTERÍSTICOS.



IV) a) DETERMINE A RESPOSTA IMPULSIONAL DE UM SISTEMA LTI CUJA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA É:

$$H(j\omega) = \frac{\text{sen}^2(3\omega)}{\omega^2} \quad \text{com } \omega$$

b) SEJA UM SINAL $x(t)$ CUJA T.F. É:

$$X(j\omega) = \delta(\omega) + \delta(\omega - \pi) + \delta(\omega - 5)$$

E SEJA

$$h(t) = u(t) - u(t-2)$$

COMENTE QUANTO À PERIODICIDADE OS SINAIS $x(t)$, $h(t)$ E $y(t) = x(t) \otimes h(t)$. SE $x(t) = \text{sen}(\pi t) + \cos(3\pi t)$ QUAL SERÁ $y(t)$?

V) A ENTRADA E A SAÍDA DE UM SISTEMA LTI ESTÁVEL E CAUSAL ESTÃO RELACIONADAS PELA EQUAÇÃO DIFERENCIAL

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = 3x(t)$$

DETERMINE A RESPOSTA:

a) AO DEGRAU DE HEAVISIDE

b) A UMA ENTRADA DA FORMA $x(t) = 2\cos(2t) - 5\text{sen}(7t)$

c) REPITA A ALÍNEA a) PARA UM SISTEMA LTI CAUSAL E ESTÁVEL DESCRITO PELA EQUAÇÃO DIFERENCIAL

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 2\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 3x(t)$$