FOLHA 11

SINAIS E SISTEMAS

(4)

XX) CONSIDERE A TRANSFORMADA DE LAPLACE UNILATERAL

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

DETERMINE A CORRESPONDENTE FUNÇÃO DO TEMPO $x(t)$

XXI) CONSIDERE A TRANSFORMADA DE LAPLACE UNILATERAL DE UMA FUNÇÃO $x(t)$ (CAUSAL)

$$X(s) = \frac{s^2-3}{s+2}$$

DETERMINE $x(t)$

XXII) CONSIDERE UM SISTEMA CAUSAL LTI DESCRITO PELA EQUAÇÃO DIFERENCIAL

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

DETERMINE, SUPONDO CONDIÇÕES INICIAIS NULAS A RESPOSTA A UMA ENTRADA DO TIPO

$x(t) = \alpha\, u(t)$ (DEGRAU DE HEAVISIDE DE ALTURA $\alpha$)

XXIII) CONSIDERE O MESMO SISTEMA DO PROBLEMA ANTERIOR MAS COM CONDIÇÕES INICIAIS

$$y(0^-) = \beta \qquad y'(0^-) = \gamma$$

DETERMINE A SAÍDA À MESMA ENTRADA.

FOLHA 11 RESOLUÇÕES

(7)

SINAIS E SISTEMAS

TRANSFORMADA DE LAPLACE BILATERAL

DEFINIÇÕES: $X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-st}\, dt \qquad x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$

I) $x(t) = e^{-at} \cdot u(t)$

TRANSFORMADA DE FOURIER:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} \cdot u(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{j\omega + a} \quad \text{com } a > 0$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} e^{-st} \cdot u(t)\, dt = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma + a)t}\, dt \qquad s = \sigma + j\omega$$

$$X(\sigma + j\omega) = \frac{1}{(\sigma + a) + j\omega} \quad \text{com } \sigma + a > 0$$

$$X(s) = \frac{1}{s+a} \qquad \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

$$e^{-at} \cdot u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+a} \quad \text{com } \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

PARA $a = 0$ $\quad X(s) = \frac{1}{s}$ ; $\mathrm{Re}\{s\} > 0$ (DEGRAU DE HEAVISIDE)

$$X(0 + j\omega\ ;\ \sigma = 0) = \frac{1}{j\omega + a} \quad (\text{T.F.})$$

II) $x(t) = -e^{-at} \cdot u(-t)$

$$X(s) = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} e^{-st} u(-t)\, dt =$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s+a)t}\, dt$$

$$X(s) = \frac{1}{s+a}$$

FOLHA 11 Resolução ②

PARA CONVERGIR $\quad Re\{s+a\} < 0 \qquad Re\{s\} < -a$

LOGO: $\quad -e^{-(at)}u(-t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a} \quad$ COM $\quad Re\{s\} < -a$

IV)

$$x(t) = 3e^{-2t}\cdot u(t) - 2e^{-t}u(t)$$

$$X(s) = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1} \qquad \text{(DE MODO ANÁLOGO AOS ANTERIORES)}$$

Logo:

$$e^{-t}u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+1} \qquad Re\{s\} > -1$$

$$e^{-2t}u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+2} \qquad Re\{s\} > -2$$

$$3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{s-1}{s^2+3s+2} \qquad Re\{s\} > -1$$

(INTERSECÇÃO DOS 2 DOMÍNIOS)

III) $\quad x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-3t}\cos(3t)\cdot u(t)$

PORTANTO:

$$x(t) = \left[e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-(1-3j)t} + \frac{1}{2}e^{-(1+3j)t}\right]\cdot u(t)$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t}\cdot u(t)\, e^{-st}\,dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots dt =$$

$$= \cdots$$

$$e^{-2t}\cdot u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+2} \qquad Re\{s\} > -2$$

$$e^{-(1-3j)t}\cdot u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+(1-3j)} \qquad Re\{s\} > -1$$

$$e^{-(1+3j)t}\cdot u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+(1+3j)} \qquad Re\{s\} > -1$$

NOTE QUE

LOGO: $\quad e^{-2t}\cdot u(t) + e^{-t}\cos(3t)\,u(t) \longleftrightarrow [s+(1-3j)][s+(1+3j)] = s^2+2s+10$

$$\longleftrightarrow \frac{2s^2+5s+12}{(s^2+2s+10)(s+2)} \quad \text{COM} \quad Re\{s\} > -1$$

RESOLUÇÕES

**V)**

$$x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3} e^{-t} u(t) + \frac{1}{3} e^{2t} u(t)$$

$$X(s) = 1 - \frac{4}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} \qquad \mathrm{Re}\{s\} > 2$$

$$X(s) = \frac{(s+1)^2}{(s+1)(s-2)} \quad \text{com} \quad \mathrm{Re}\{s\} > 2$$

**VI)**

$$x(t) = e^{-b|t|}$$

$$x(t) = e^{-bt} u(t) + e^{bt} u(-t)$$

$$e^{-bt} u(t) \hookrightarrow \frac{1}{s+b} \qquad \mathrm{Re}\{s\} > -b$$

$$e^{bt} u(t) \hookrightarrow \frac{1}{s-b} \qquad \mathrm{Re}\{s\} < +b$$

$$e^{-b|t|} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+b} - \frac{1}{s-b} = -\frac{2b}{s^2-b^2} \qquad -b < \mathrm{Re}\{s\} < b$$

TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds \quad \text{(CONTORNO)}$$

**VII)**

$$X(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} \quad \text{com } \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

$$A = \left[(s+1)\cdot X(s)\right]_{s=-1} = 1$$

$$B = \left[(s+2)\cdot X(s)\right]_{s=-2} = -1$$

$$X(s) = \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{e^{-t}u(t)} - \underbrace{\frac{1}{s+2}}_{e^{-2t}u(t)}$$

$$\left[e^{-t} - e^{-2t}\right] \cdot u(t) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad \text{com } \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

RESOLUÇÕES

VIII)

$$-e^{-t}\,u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+1} \qquad \mathrm{Re}\{s\} < -1$$

$$-e^{-2t}\,u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+2} \qquad \mathrm{Re}\{s\} < -2$$

Logo

$$x(t) = \left[e^{-t} + e^{-2t}\right] u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{(s+1)(s+2)} \qquad \mathrm{Re}\{s\} < -2$$

TEMOS AINDA:

$$x(t) = -e^{-t}\,u(-t) - e^{-2t}\,u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{(s+1)(s+2)}\ ;\ -2 < \mathrm{Re}\{s\} < -1$$

IX) $\quad x(t) = t\,e^{-at}\,u(t)$

$$e^{-at}\,u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a} \qquad \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

$$t\,e^{-at}\,u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s+a}\right] = \frac{1}{(s+a)^2}\ ;\ \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

POR DERIVAÇÕES SUCESSIVAS TEMOS:

$$\frac{t^2}{2}\,e^{-at}\,u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{(s+a)^3}\ ;\ \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

DE UM MODO MUITO GERAL

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{-at}\,u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{(s+a)^n}\ ;\ \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

X) $\quad X(s) = \dfrac{2s^2 + 5s + 5}{(s+1)^2\,(s+2)} \qquad \mathrm{Re}\{s\} > -1$

$$X(s) = \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2} \qquad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

$$x(t) = \left[2t\,e^{-t} - e^{-t} + 3\,e^{-2t}\right] u(t)$$

NOTE QUE: $\quad \displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau = u(t) \otimes x(t)$

RESOLUÇÕES

$u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s}$ ; $Re\{s\} > 0$

$u(t) \otimes x(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s} X(s)$ (MUITO IMPORTANTE

XI) TEOREMAS DO VALOR INICIAL E FINAL

$$x(0+) = \lim_{s \to \infty} sX(s) \quad \text{com } x(t)=0 \ t<0$$

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s) \quad \text{com } x(t)=0 \ t<0$$

E $x(t)$ tende para um limite finito quando $t \to$

$$\lim_{s \to \infty} s \cdot X(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{2s^3 + 5s^2 + 10s}{s^3 + 4s^2 + 14s + 20} = 2$$

(VER EXERCÍCIO 4 DA FOLHA II)

XII) $e^{-t} u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+1}$ $Re\{s\} > -1$

USANDO A PROPRIEDADE DA TRANSLAÇÃO TEMPO:

$e^{-(t+1)} \cdot u(t+1) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{e^{s}}{s+1}$ $Re\{s\} > -1$

A RESPOSTA IMPULSIONAL DO SISTEMA É, ENTÃO:

$h(t) = e^{-(t+1)} \cdot u(t+1)$

NÃO NULA PARA $-1 < t < 0$ (ALÉM DE PARA $t \geq 0$). LOGO O SISTEMA NÃO É CAUSAL

XIII) $y(t) \leftrightarrow Y(s)$ $\quad \frac{dy(t)}{dt} \leftrightarrow sY(s)$

$x(t) \leftrightarrow X(s)$

LOGO $sY(s) + 3Y(s) = X(s)$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+3}$$

E $h(t) = e^{-3t} \cdot u(t)$ (CAUSAL)

OU:

$$h(t) = -e^{-3t}u(t) \qquad \text{[ANTICAUSAL]}$$

XIII)

USANDO $\quad y(t) \longleftrightarrow Y(s)$

TEMOS $\quad \frac{dy(t)}{dt} \longleftrightarrow sY(s) \quad$ E $\quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} \longleftrightarrow s^2Y(s)$

SE $\quad x(t) \longleftrightarrow X(s) \quad$ E $\quad H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$

OBTEMOS DE IMEDIATO:

$$H(s) = \frac{1/LC}{s^2 + \left(\frac{R}{L}\right)s + \left(\frac{1}{LC}\right)}$$

A PARTIR DA CORRESPONDENTE EQUAÇÃO DIFERENCIAL DO CIRCUITO

XV)

$$e^{-3t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+3} \qquad \text{Re}\{s\} > -3$$

$$\left[e^{-t} - e^{-2t}\right]u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{(s+1)(s+2)} \qquad \text{Re}\{s\} > -1$$

LOGO:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

$$\text{Re}\{s\} > -1$$

A EQUAÇÃO DIFERENCIAL CORRESPONDENTE É IMEDIATA

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

XVI) ATENDENDO AOS DADOS O SISTEMA TEM DE TER UMA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DA FORMA

$$H(s) = \frac{p(s)}{(s+2)(s-4)} = \frac{p(s)}{s^2 - 2s - 8}$$

POR OUTRO LADO DADO QUE A RESPOSTA $y(t)$ É NULA QUANDO $x(t) = 1$. TEMOS DE TER:

$$P(s) = s\,Q(s)$$ ONDE $Q(s)$ É OUTRO POLINÓMIO EM $s$

PELO TEOREMA DO VALOR INICIAL TEMOS:

$$\lim_{s\to\infty} s\,H(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^3 Q(s)}{s^2 - 2s - 8} = 4$$

$$\lim_{s\to\infty} \frac{k s^2}{s^2 - 2s - 8} = \lim_{s\to\infty} \frac{k s^2}{s^2} = k = 4$$

LOGO $$H(s) = \frac{4s}{(s+2)(s-4)}$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE UNILATERAL

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$ (NOTE O LIMITE INFERIOR EM $0^-$ PARA CONTER A ORIGEM).

XVII) DADO QUE $x(t) = 0$ PARA $t < 0$ AS TRANSFORMADAS UNILATERAL E BILATERAL COINCIDEM. LOGO:

$$X(s) = \frac{1}{(s+a)^2}$$ PELA PROPRIEDADE DA DERIVAÇÃO NO DOMÍNIO $s$

XVIII)

$$x(t) = e^{-a(t+1)}\, u(t+1)$$

A TRANSFORMADA BILATERAL É, COMO JÁ VIMOS:

$$X(s) = \frac{e^s}{s+a}$$ COM $\mathrm{Re}\{s\} > -a$

A TRANSFORMADA UNILATERAL VALE:

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-a(t+1)}\, u(t+1)\, e^{-st}\, dt =$$

RESOLUÇÕES

$$= \int_{0^-}^{\infty} e^{-a}\, e^{-t(s+a)}\, dt =$$

$$= e^{-a}\,\frac{1}{s+a} \quad ; \quad \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

AS DUAS TRANSFORMADAS SÃO BEM DIFERENTES. (CUIDADO!!!)

IX) $x(t) = \delta(t) + 2u_1(t) + e^{t}u(t)$

DADO QUE $x(t) = 0$ PARA $t < 0$ E QUE AS SINGULARIDADES NA ORIGEM ESTÃO INCLUÍDAS NO INTERVALO DE INTEGRAÇÃO AS 2 TRANSFORMADAS COINCIDEM

NOTE-SE QUE: $u_n(t) \hookrightarrow s^n$

LOGO: $X(s) = X(s) = 1 + 2\frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} = \frac{s(2s-1)}{s-s}$

(GRAU DO NUMERADOR SUPERIOR AO DO DENOMINADOR - POR CONTER DERIVADA DE DIRAC; SE FOREM IGUAIS OS GRAUS DO NUMERADOR E DENOMINADOR A FUNÇÃO CONTEM OBRIGATORIAMENTE UM DIRAC NA ORIGEM). $\mathrm{Re}\{s\} > 1$

RESOLUÇÕES

XIX)

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

EMBORA HAJA VÁRIAS TRANSFORMADAS INVERSAS DE LAPLACE DE $X(s)$ SÓ PODEREMOS CONSIDERAR (DEVIDO A SER TRANSFORMADA UNILATERIAL) A QUE CORRESPONDE A FUNÇÕES CAUSAIS DO TEMPO. LOGO:

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \qquad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

E DAQUI RESULTA IMEDIATAMENTE:

$$x(t) = \left[e^{-t} - e^{-2t}\right] \cdot u(t) \qquad ; t > 0^-$$

XX)

$$X(s) = \frac{s^2-3}{s+2}$$

$$\begin{array}{r|l} s^2+0s-3 & s+2 \\ \hline -s^2-2s & s-2 \\ \hline -2s-3 & \\ +2s+4 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$X(s) = A + Bs + \frac{C}{s+2}$$

$$X(s) = s - 2 + \frac{1}{s+2} \qquad \mathrm{Re}\{s\} > -2$$

TOMANDO AS TRANSFORMADAS INVERSAS DE CADA TERMO TEMOS:

$u_1(t) = \frac{d}{dt}[\delta(t)]$ $\qquad x(t) = -2\delta(t) + u_1(t) + e^{-2t}u(t) \qquad ; t > 0^-$

XXI)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = x(t) \qquad \text{COM} \quad \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{array}$$

COMO É ÓBVIO:

$$H(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}$$

$x(t) = \delta(t)$

$\delta(t) \xleftrightarrow{L} 1$

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) = \frac{\alpha}{s(s+1)(s+2)} =$$

$H(s)$ - FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA NO DOMÍNIO $s$

$$= \frac{\alpha/2}{s} - \frac{\alpha}{s+1} + \frac{\alpha/2}{s+2}$$

$x(t) = \alpha u(t) \leftrightarrow \frac{\alpha}{s}$

CALCULANDO A TRANSFORMADA INVERSA DE CADA TERMO TEMOS:

$$Y(t) = \alpha\left[\frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right] \cdot u(t)$$

RESOLUÇÕES

VEJAMOS AGORA PARA A TRANSFORMADA UNILATERAL DE UM SINAL $x(t)$ (COM TRANSFORMADA $X(s)$) QUAL É A TRANSFORMADA DA DERIVADA DA FUNÇÃO: TEMOS, PELA DEFINIÇÃO E USANDO INTEGRAÇÃO POR PARTES:

$$\int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st}\,dt = \left[x(t)\,e^{-st}\right]_{0^-}^{\infty} + s\int_{0^-}^{\infty} x(t)\,e^{-st}\,dt =$$

$$= s\,X(s) - x(0^-)$$

QUAL SERÁ A TRANSFORMADA DA 2ª DERIVADA DE UMA FUNÇÃO? É IMEDIATO PROVAR QUE:

$$F(s) = s^2 X(s) - s\,x(0^-) - x'(0^-)$$ E ASSIM SUCESSIVAMENTE (COM AS CONDIÇÕES INICIAIS)

XXII) $\quad \frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$ COM $y(0^-) = \beta$, $y'(0^-) = \gamma$

USANDO A EXPRESSÃO ACIMA DEDUZIDA TEMOS:

$$s^2 Y(s) - \beta s - \gamma + 3sY(s) - 3\beta + 2Y(s) = \frac{\alpha}{s}$$

$\updownarrow$ $x(t) = \alpha \cdot u(t)$

LOGO:

$$Y(s) = \frac{\beta(s+1)}{(s+1)(s+2)} + \frac{\gamma}{(s+1)(s+2)} + \underbrace{\frac{\alpha}{s(s+1)(s+2)}}$$

(AGORA É SÓ DECOMPOR EM FRACÇÕES SIMPLES)

RESPOSTA JÁ CALCULADA NO EXERCÍCIO ANTERIOR (ZERO-STATE RESPONSE - CONDIÇÕES INICIAIS NULAS); SOLUÇÃO FORÇADA

PARA $\alpha = 2$, $\beta = 3$ E $\gamma = -5$

OBTEMOS:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2}$$

E DAÍ RESULTA, DE TODO TRIVIAL:

$$y(t) = \left[1 - e^{-t} + 3e^{-2t}\right] \cdot u(t) \quad ; \quad t > 0^-$$

FOLHA 4 COMPLEMENTOS — RESOLUÇÕES

TRANSFORMADA DE FOURIER

E)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) \overset{T.F.}{\longleftrightarrow} F(\omega)$$

a) PROPRIEDADES DO DIRAC

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t)\,dt = f(0) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$$

$$f(t)\,\delta(t) = f(0)\,\delta(t) \qquad f(t)\,\delta(t-t_0) = f(t_0)\,\delta(t-t_0)$$

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega 0} = 1$$

b)

Se: $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$

$$F(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

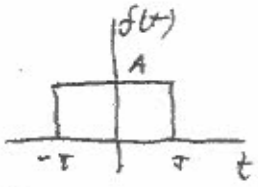
$$1 \longleftrightarrow 2\pi\,\delta(-\omega) = 2\pi\,\delta(\omega)$$

(A FUNÇÃO DE DIRAC É PAR)

c)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & |t| > T \\ A & |t| < T \end{cases}$$

(FUNÇÃO PEDESTAL)



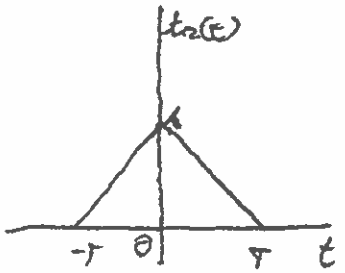

$$F(\omega) = \int_{-T}^{T} A\, e^{-i\omega t} dt = \left[ \frac{A}{-i\omega} e^{-i\omega t} \right]_{-T}^{T} =$$

$$= \frac{A}{-i\omega} \left[ e^{-i\omega T} - e^{i\omega T} \right] = \frac{-2iA}{-i\omega} \operatorname{sen}(\omega T) =$$

$\operatorname{senc}$ — seno cardinal

$$= 2AT\, \frac{\operatorname{sen}(\omega T)}{\omega T} = 2AT\, \operatorname{senc}(\omega T)$$

d) Há vários métodos alternativos de resolver este problema




1º PROCESSO:

USANDO A DEFINIÇÃO

$$F(\omega) = \int_0^T \left(-\frac{A}{T}t + A\right) e^{-i\omega t}\,dt + \int_{-T}^{0} \left(\frac{A}{T}t + A\right) e^{-i\omega t}\,dt =$$

$$\int e^{-i\omega t}\,dt = \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} + t$$

$$\int t\, e^{-i\omega t}\,dt = \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\, t - \int \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\,dt =$$

$$= \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\, t - \frac{e^{-i\omega t}}{(i\omega)^2}$$

(após cálculo em pouco trabalhoso)

$$= \frac{4A}{T\omega^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

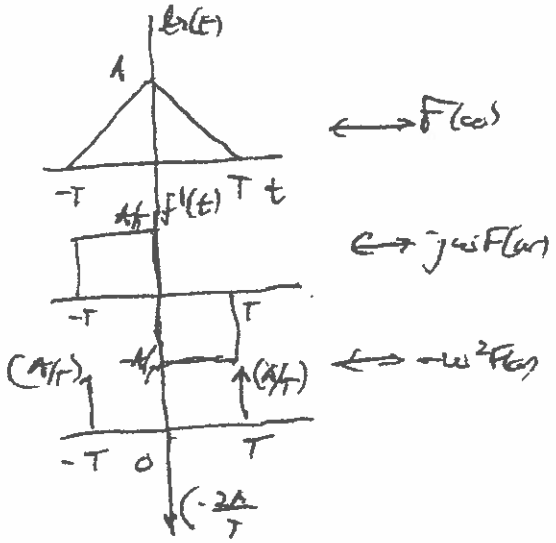
2º PROCESSO:

USANDO A REGRA DA DERIVAÇÃO

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$

$$f'(t) \longleftrightarrow j\omega F(\omega)$$

$$f''(t) \longleftrightarrow -\omega^2 F(\omega)$$




$$-\omega^2 F(\omega) = -\frac{2A}{T} + \frac{A}{T}\left[e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}\right]$$

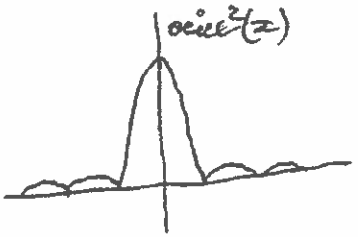
$$F(\omega) = \frac{A}{T} \cdot \frac{-2 + 2\cos(\omega T)}{-\omega^2} =$$

$$= \frac{A}{T} \cdot \frac{4 \operatorname{sen}^2\left(\omega T/2\right)}{\omega^2} =$$

$$= AT \cdot \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T^2}{4}} = AT \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

$$1 - \cos(2\omega T) = 2\operatorname{sen}^2(\omega T)$$

$$1 - \cos(\omega T) = 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$



OUTRAS PROPRIEDADES IMPORTANTES DA TRANSFORMADA DE FOURIER

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$

$$e^{j\omega_0 t} f(t) \longleftrightarrow F(\omega - \omega_0)$$

$$f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

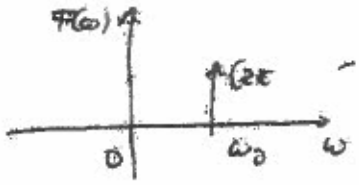
(SE O TEMPO "ENCOLHE" A FREQUÊNCIA "ESTICA" E VICE-VERSA)

$$f(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0}$$

$$(-jt)^n f(t) \longleftrightarrow \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$$

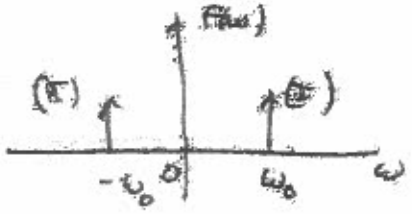
CONJUGADO $\longrightarrow$ $f^*(t) \longleftrightarrow F^*(-\omega)$

e) $e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega - \omega_0)$ POIS $1 \longleftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega)$




f) $\cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \frac{2\pi}{2}\left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right]$

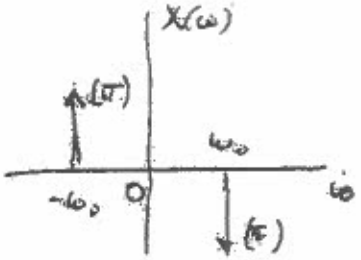
$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$




(COSSENOIDE PURA SÓ TEM UMA FREQUÊNCIA)

g) $\operatorname{sen}(\omega_0 t) \longleftrightarrow j\pi\left[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)\right]$

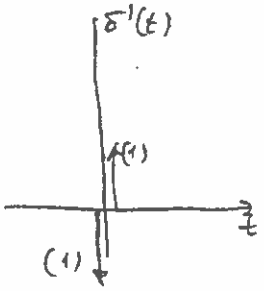
$$\operatorname{sen}(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$



h) $\delta'(t) \longleftrightarrow ?$

$\delta(t) \longleftrightarrow 1$

$\delta'(t) \longleftrightarrow j\omega$



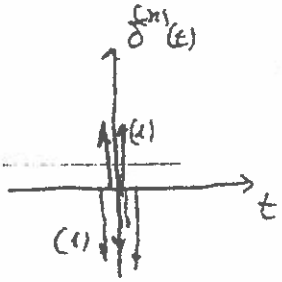

$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$

$f'(t) \longleftrightarrow j\omega F(\omega)$

(NOTE QUE A DERIVADA DE UM DIRAC SÃO 2 DIRAC'S, UM PARA BAIXO E OUTRO PARA CIMA)

i) $\delta(t) \longleftrightarrow 1$

$\delta^{(n)}(t) \longleftrightarrow (j\omega)^n$



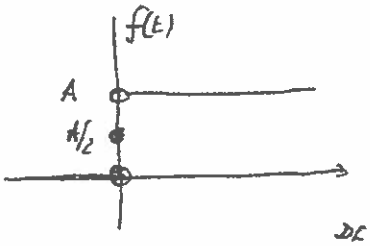

$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$

$f^{(n)}(t) \longleftrightarrow (j\omega)^n \cdot F(\omega)$

(NOTE QUE A DERIVADA DE ORDEM $n$ DE UM DIRAC SÃO $n$ DIRAC'S ALTERNADAMENTE PARA BAIXO E PARA CIMA TODOS NA ORIGEM)

j) $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A & t > 0 \end{cases}$

(DEGRAU DE HEAVISIDE)




DE DIRAC DE ALTURA A

(ESTA FUNÇÃO É O INTEGRAL INDEFINIDO DE UMA FUNÇÃO COLOCADA NA ORIGEM).

PROPRIEDADE IMPORTANTE (MAL QUE MERECE REFLEXÃO ATENTA)

$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$

$\int_{-\infty}^{t} f(t)\,dt \longleftrightarrow \frac{F(\omega)}{j\omega}$

$f(t) = \int_{-\infty}^{t} A\,\delta(t)\,dt$

COMO DERIVAR NO DOMÍNIO DOS TEMPOS É MULTIPLICAR POR $j\omega$ NO DOMÍNIO DAS FREQUÊNCIAS, INTEGRAR NO DOMÍNIO DOS TEMPOS (OPERAÇÃO INVERSA) DEVIA SER DIVIDIR POR $j\omega$ NO DOMÍNIO DAS FREQUÊNCIAS. ISTO É UM RACIOCÍNIO ARRISCADO. COISA DO TAL NÃO BASTA; SÓ É VÁLIDO ESTE RACIOCÍNIO SE O VALOR DE $f$ NA ORIGEM FOR 0.

NA REALIDADE, TEMOS DE UM MODO GERAL (VER PAPOULIS):

$$\int_{-\infty}^{t} f(t)\,dt \longleftrightarrow \frac{F(\omega)}{j\omega} + 2\pi f(0)\,\delta(\omega)$$

LOGO NO NOSSO CASO RESULTA:

$$f(t) \longleftrightarrow \frac{A}{j\omega} + 2\pi\cdot\left(\frac{A}{2}\right)\cdot\delta(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi A\,\delta(\omega)$$

$\frac{1}{j\omega} = A$ – TRANSFORMADA DE FOURIER DE UM DIRAC DE ALTURA A

$\frac{A}{2}$ É O VALOR DE $f(0)$ = MÉDIA NO PONTO DE DESCONTINUIDADE ENTRE $\underline{0}$ E $\underline{A}$.

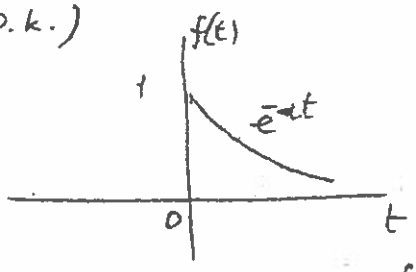
DERIVANDO, E COMO CONFIRMAÇÃO DO QUE FOI DITO, TEMOS:

$$f'(t) \longleftrightarrow (j\omega)\left[\frac{A}{j\omega} + \pi A\,\delta(\omega)\right] =$$

$$= A + \pi A\cdot j\omega\cdot\delta(\omega) = A \qquad \text{pois } \omega\,\delta(\omega) = 0\cdot\delta(\omega) = 0$$

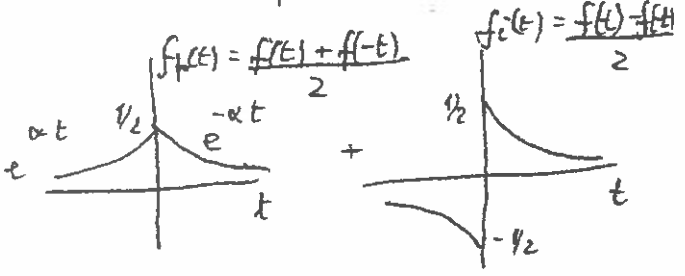
(O.K.)

e) $$f(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ e^{-\alpha t} & t>0 \end{cases}$$




$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-i\omega t}\,dt =$$

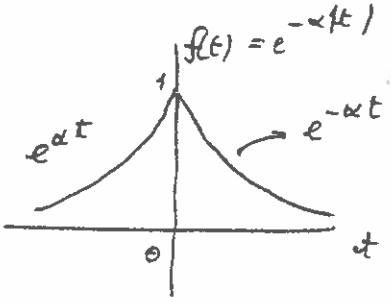
$$= \left[\frac{e^{-(\alpha+i\omega)t}}{-(\alpha+i\omega)}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha+i\omega}$$




$$F(\omega) = \frac{1}{\alpha+i\omega} = \frac{\alpha}{\alpha+\omega^2} \quad i\,\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$

(A FUNÇÃO $f(t)$ NÃO É PAR NEM IMPAR LOGO TEM PARTE REAL E IMAGINÁRIA $F(\omega) = R(\omega) + iX(\omega)$)

m) $f(t) = e^{-\alpha|t|}$




COMO $f(t)$ É O DOBRO DA PARTE REAL DE $f(t)$ CALCULADA EM 6 TEMOS:

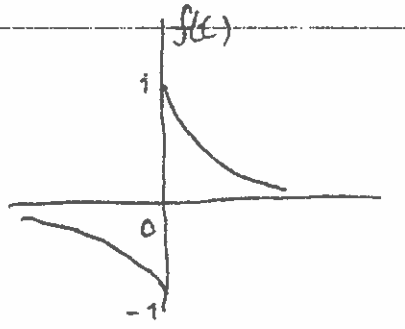
$$F(\omega) = 2\,\mathcal{L}_+\left[\frac{1}{\alpha+i\omega}\right] =$$

$$= \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

(para uma função par a parte imaginária da sua transformada é nula)

n) $$F(\omega) = 2i\,\mathcal{L}_m\left[\frac{1}{\alpha+i\omega}\right] =$$

$$= -2i\,\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$




(para uma função ímpar a parte real da sua transformada é nula)

o) Momento de ordem $n$ de uma função $f(t)$

Se $$m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n \cdot f(t)\,dt \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

então: $$(-j)^n \cdot m_n = \left.\frac{d^n f(\omega)}{d\omega^n}\right|_{\omega=0} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Prova:

$n = 0$ $$m_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = F(0) = A(0)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-j\omega)^n}{n!}\right)dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-j)^n\frac{\omega^n}{n!}\,m_n$$

$$F(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty}\left.\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}\right|_{\omega=0}\frac{\omega^n}{n!}$$

(daqui resulta logo o teorema)

Aplicação à função gaussiana

$$f(t) = e^{-\alpha t^2}$$

TEMOS: $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

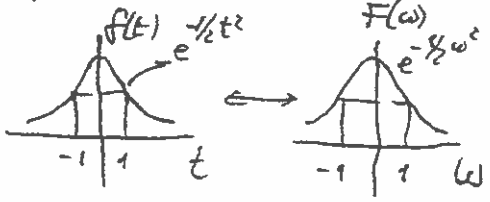
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n} e^{-\alpha t^2} dt = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2^n} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2n+1}}}$$ (integral bem conhecido)

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{(2\alpha)^n (2n)!} (-j\omega)^{2n}$$

que é o desenvolvimento em série de Taylor de $e^{-\omega^2/4\alpha}$

Daqui resulta:

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\omega^2/4\alpha}$$




Para $\alpha = \frac{1}{2}$ temos:

$$e^{-t^2/2} \longleftrightarrow e^{-\omega^2/2}$$

$\sigma_t = 1$ ; $\sigma_\omega = 1$ $\quad \sigma_t \cdot \sigma_\omega = 1$ (incerteza de Heisenberg)

o)

$$f(t) = s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = \text{trem de Diracs} \quad (T = \text{const.})$$

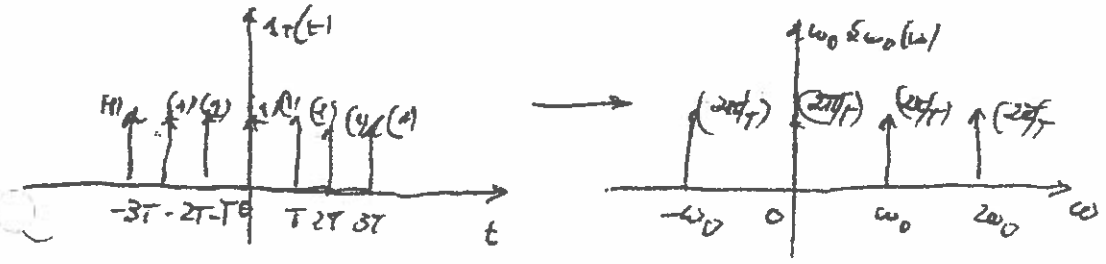
É um pouco complicado, de um modo formal, calcular a transformada de Fourier de um pente de Dirac's (ver Papoulis). Se o espaçamento no domínio dos tempos for grande ele será pequeno no domínio das frequências e vice-versa.

SEJÃO ENTÃO $\quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \longleftrightarrow \omega_0 S_{\omega_0}(\omega) =$$

$$= \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0) =$$

$$= \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - n\frac{2\pi}{T}\right)$$



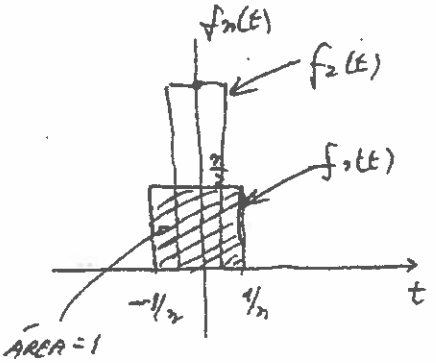
7' **APÊNDICE 1 :.**

## PROPRIEDADES DA FUNÇÃO DE DIRAC (DISTRIBUIÇÃO)

DEFINIÇÃO :

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{n}{2} & |t| < \frac{1}{n} \\ 0 & |t| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\text{ÁREA} = \int_{-1/n}^{1/n} f_n(t)\,dt = \int_{-1/n}^{1/n} \frac{n}{2}\,dt = 1$$

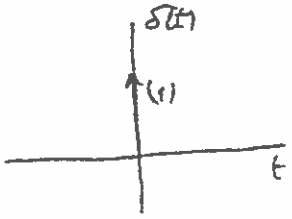



LOGO: $\delta(t) = \lim_{n \to \infty} f_n(t)$

(NO LIMITE, $n \to \infty$ DÁ O DIRAC DE ALTURA 1)

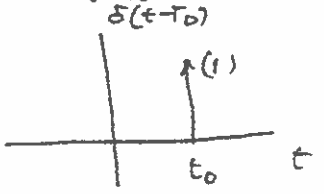
1ª PROPRIEDADE

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$$



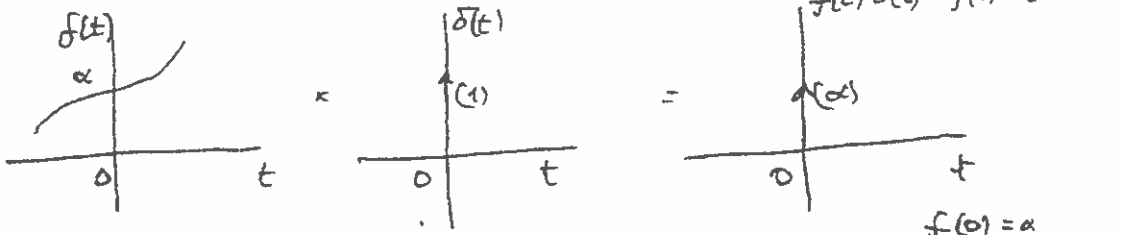
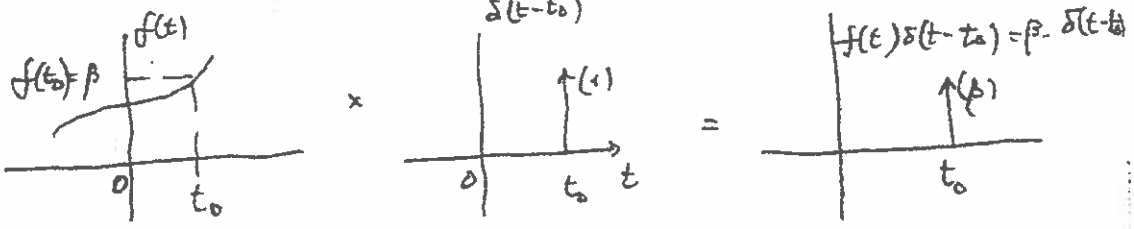

DE MODO ANÁLOGO E COMO GENERALIZAÇÃO

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)\,dt = 1$$




ENTÃO :

$$f(t)\,\delta(t) = f(0).\,\delta(t)$$ (DIRAC DE ALTURA $f(0)$, NA ORIGEM)

DE MODO ANÁLOGO :

$$f(t)\,\delta(t - t_0) = f(t_0).\,\delta(t - t_0)$$ (DIRAC DE ALTURA $f(t_0)$, NO PONTO $t_0$)