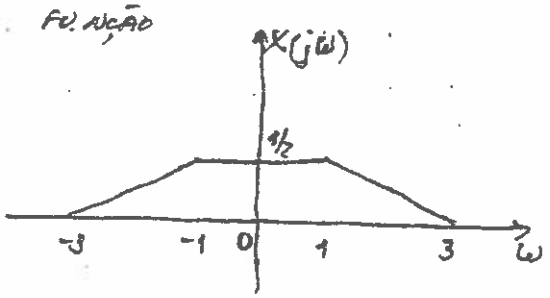
QUE CORRESPONDE À CONVOLUÇÃO DOS 2 PEDESTAIS REPRESENTADOS NA FIGURA SEGUINTE

A CORRESPONDENTE CONVOLUÇÃO (DIVIDIDA POR 2) CORRESPONDE, COMO É ELEMENTAR, À SEGUINTE FUNÇÃO



XII)

$$\frac{dy(t)}{dt} + a\,y(t) = x(t)$$

É ÓBVIO QUE: $j\omega Y(j\omega) + a Y(j\omega) = X(j\omega)$

LOGO: $$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{j\omega + a}$$

A RESPOSTA IMPULSIONAL É A TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER DE $H(j\omega)$ $\left(x(t) = \delta(t) \overset{T.F.}{\longleftrightarrow} 1\right)$

RESULTA:

$$h(t) = e^{-at} \cdot u(t)$$

XIII) $$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

É IMEDIATO ESCREVER A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA ASSOCIADA AO SISTEMA

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega) + 2}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3}$$

FACTORIZANDO O DENOMINADOR FICA:

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)+2}{(j\omega+1)(j\omega+3)}$$

USANDO O METODO DE DECOMPOSIÇÃO EM FRACÇÕES SIMPLES ASSOCIADO AO METODO DOS COEFICIENTES INDETERMINADOS TEMOS:

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{2}}{j\omega+1} + \frac{\frac{1}{2}}{j\omega+3}$$

DETERMINANDO A TRANSFORMADA INVERSA DE $H(j\omega)$ OBTEMOS A RESPOSTA IMPULSIONAL:

$$h(t) = \left[\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right].u(t)$$

XIII)

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

ONDE $x(t) = e^{-t}.u(t)$

A TRANSFORMADA DE FOURIER DA SAÍDA VALE:

$$Y(j\omega) = H(j\omega).X(j\omega) = \left[\frac{j\omega+2}{(j\omega+1)(j\omega+3)}\right].\left[\frac{1}{j\omega+1}\right]$$

$$= \frac{j\omega+2}{(j\omega+1)^2(j\omega+3)}$$

A EXPANSÃO EM FRACÇÕES SIMPLES TOMA AGORA A FORMA (VER APÊNDICE DO LIVRO SIGNALS and SYSTEMS)

$$Y(j\omega) = \frac{A}{j\omega+1} + \frac{B}{(j\omega+1)^2} + \frac{C}{j\omega+3}$$

OBTEMOS FINALMENTE:

$$A = 3/4 \qquad B = \frac{1}{2} \qquad C = -\frac{1}{4}$$

ENTÃO $Y(j\omega) = \frac{\frac{1}{4}}{j\omega+1} + \frac{\frac{1}{2}}{(j\omega+1)^2} - \frac{\frac{1}{4}}{j\omega+3}$

ATENDENDO ÀS PROPRIEDADES DA TFI A RESPOSTA $y(t)$ DO SISTEMA É DA FORMA:

$$y(t) = \left[\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t}\right].u(t)$$

FOLHA 10

(7)

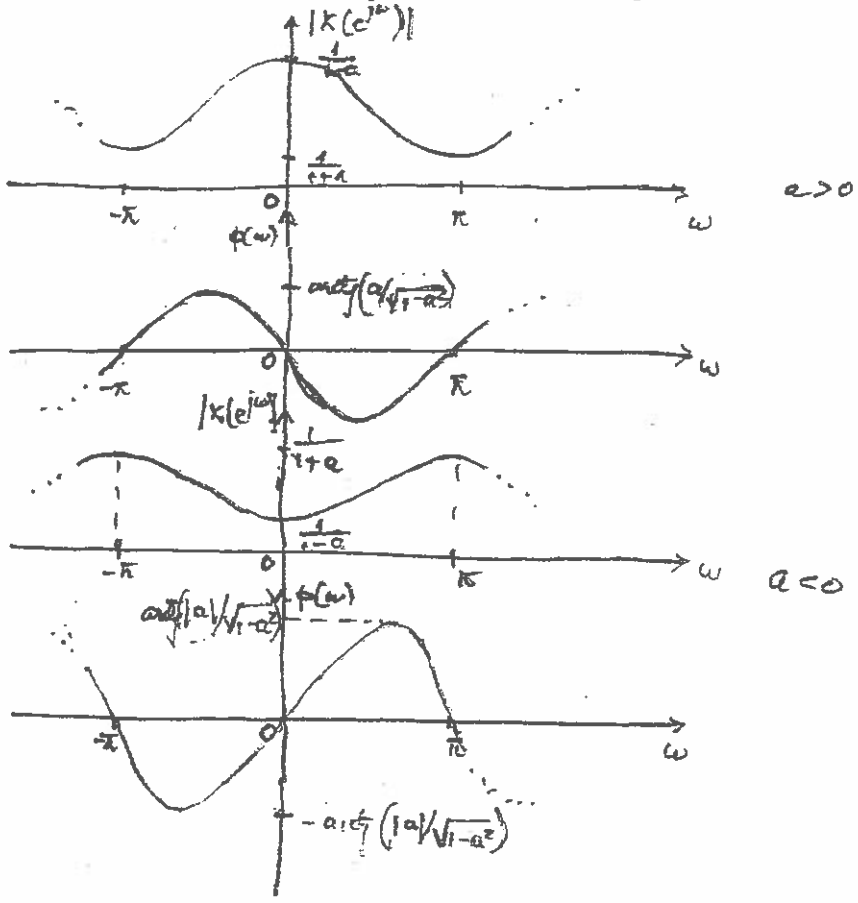
RESOLUÇÕES

I)

$$x[n] = a^n \cdot u[n] \qquad |a| < 1$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \cdot u[n] \cdot e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (a e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$$



II)

$$x[n] = a^{|n|} \qquad |a| < 1$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{|n|} e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\omega n}$$

FAZENDO A MUDANÇA DE VARIÁVEL $m = -n$ NA 2ª SOMA RESULTA:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} (a e^{-j\omega})^n + \sum_{n=-1}^{\infty} (a e^{+j\omega})^n =$$

$$= \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}} + \frac{a e^{j\omega}}{1 - a e^{j\omega}} =$$

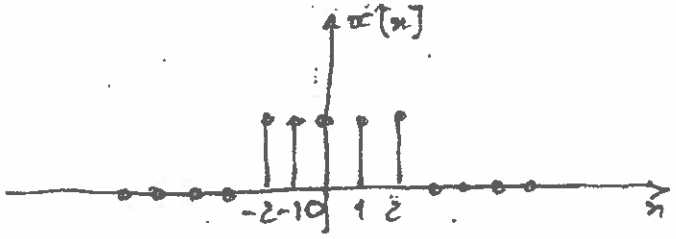
$$= \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos\omega + a^2}$$

III)

IMPULSO RECTANGULAR DISCRETO

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq N_1 \\ 0 & |n| > N_1 \end{cases}$$

O CASO PARTICULAR $N_1 = 2$ ESTÁ REPRESENTADO NA FIGURA ABAIXO INDICADA



PELA DEFINIÇÃO

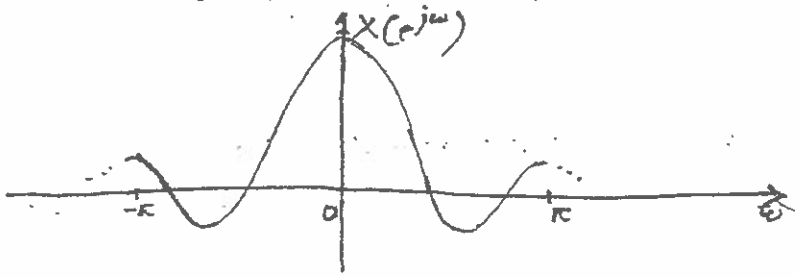
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n}$$

(PROGRESSÃO GEOMÉTRICA DE RAZÃO $e^{-j\omega n}$ COM $2N+1$ TERMOS)

APÓS CÁLCULOS ELEMENTARES RESULTA:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{\operatorname{sen}\left[\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)\right]}{\operatorname{sen}\left(\omega/2\right)}$$

A SUA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA ESTÁ FEITA ABAIXO; NOTE QUE A TRANSFORMADA É PERIÓDICA DE PERÍODO 2π !!!



IV)

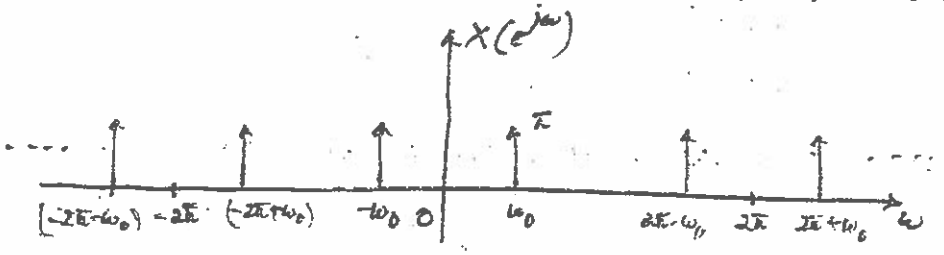
$$x[n] = \cos(\omega_0 n) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 n} \quad \text{com} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{5}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \pi \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{5} - 2\pi l\right) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \pi \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{5} - 2\pi l\right)$$

OU SEJA:

$$X(e^{j\omega}) = \pi \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{5}\right) + \pi \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{5}\right)$$

PARA $-\pi < \omega < \pi$



V)

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$$

TREM DE IMPULSOS DISCRETOS NO TEMPO

OS COEFICIENTES DA SÉRIE DE FOURIER DESTE SINAL SÃO CALCULADOS DIRECTAMENTE NA FORMA:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] \, e^{-jk(2\pi/N)n}$$

USANDO O INTERVALO DE SOMA DE 0 a N-1 OBTEMOS

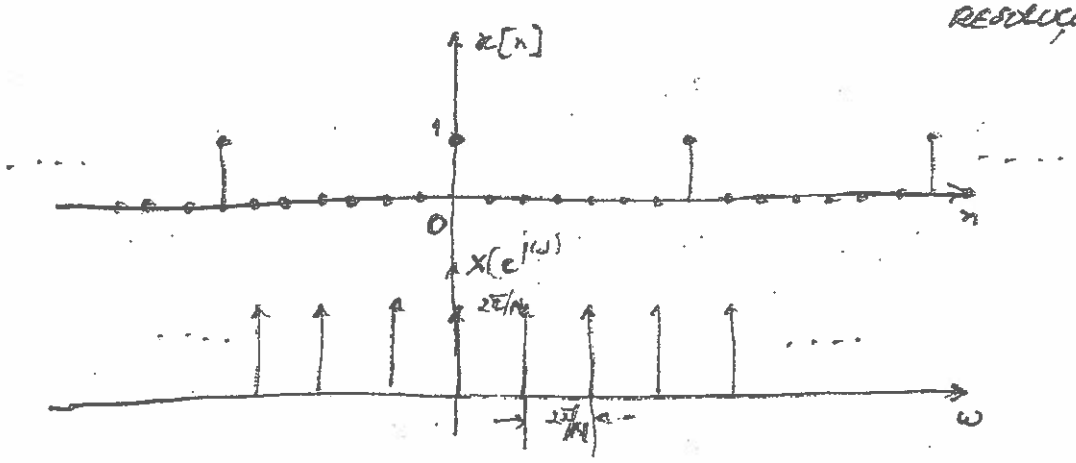
$$a_k = \frac{1}{N}$$

DAQUI RESULTA IMEDIATAMENTE

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

OS 2 SINAIS ESTÃO REPRESENTADOS A SEGUIR.

(4)
RESOLUÇÕES



VI) SE: $x[n] \overset{T.F.D.}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$

ENTÃO (SINAL ACUMULAÇÃO):

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$$

TEM COMO TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA:

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \longleftrightarrow \frac{1}{1-e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

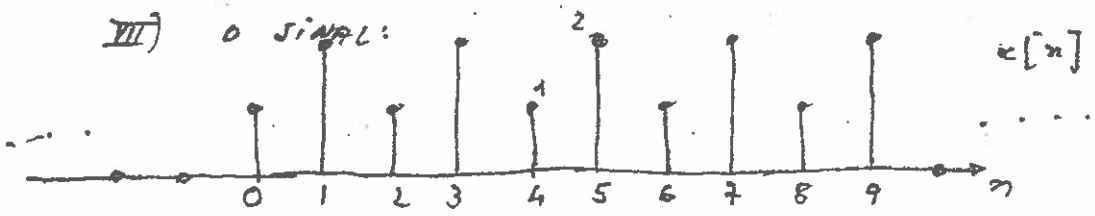
SEJA $g[n] = \delta[n] \overset{T.F.D.}{\longleftrightarrow} G(e^{j\omega}) = 1$

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} g[m]$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-e^{-j\omega}} G(e^{j\omega}) + \pi G(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

$$= \frac{1}{1-e^{-j\omega}} \cdot 1 + \pi \times 1 \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

VII) O SINAL:

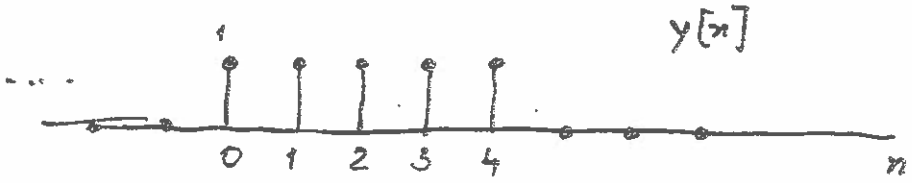


FOLHA 10

(5)

RESOLUÇÕES

PODE SER GERADO À CUSTA DO SINAL ABAIXO REPRESENTADO ($y[n]$) EM QUE:



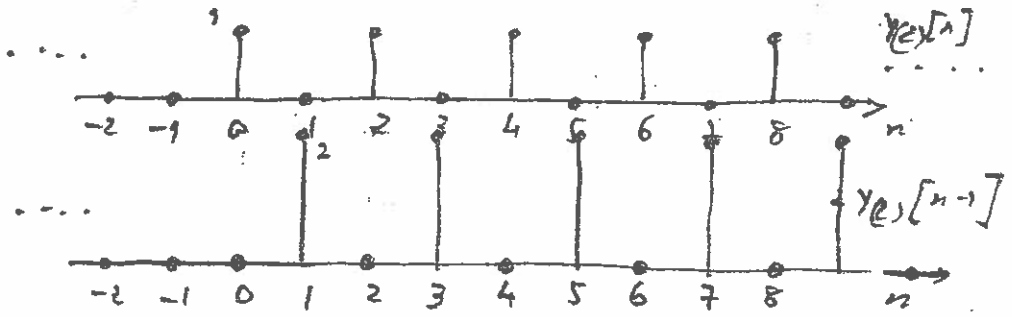
USANDO AS PROPRIEDADES DA EXPANSÃO E DA TRANSLACÇÃO NA FORMA:

$$x[n] = y_{(2)}[n] + z\, y_{(2)}[n-1]$$

ONDE SE DEFINE $y_{(2)}[n]$ POR

$$y_{(2)}[n] = \begin{cases} y[n/2] & \text{SE } n \text{ É PAR} \\ 0 & \text{SE } n \text{ É ÍMPAR} \end{cases}$$

E $y_{(2)}[n-1]$ REPRESENTA $y_{(2)}[n]$ TRANSLADADA DE UMA UNIDADE PARA A DIREITA. OS SINAIS CORRESPONDENTES ESTÃO REPRESENTADOS NAS FIGURAS ABAIXO INSERIDAS



NOTANDO QUE $y[n] = g[n-1]$ ONDE $g[n]$ É UM IMPULSO RECTANGULAR CONSIDERADO ATRÁS RESULTA PARA A T.F.D.

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega}\, \frac{\text{sen}(5\omega/2)}{\text{sen}(\omega/2)}$$

LOGO:

$$y_{(2)}[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} e^{-j4\pi}\, \frac{\text{sen}(j\omega)}{\text{sen}(\omega)}$$

RESOLUÇÕES

TEMOS, ENTÃO:

$$2y_{(2)}[n-4] \xleftrightarrow{F} 2e^{-j5\omega}\,\frac{\operatorname{sen}(5\omega)}{\operatorname{sen}(\omega)}$$

COMBINANDO OS 2 RESULTADOS OBTEMOS:

$$X(e^{j\omega}) = e^{-j4\omega}\left(1+2e^{-j\omega}\right)\cdot\left[\frac{\operatorname{sen}(5\omega)}{\operatorname{sen}(\omega)}\right]$$

VIII)

1) EM 1º LUGAR PODEMOS NOTAR QUE SE A FUNÇÃO É PERIÓDICA A SUA TRANSFORMADA DE FOURIER É NULA EXCEPTO EM PONTOS ISOLADOS ONDE HÁ IMPULSOS LOCALIZADOS EM VÁRIAS (∞'S) FREQUÊNCIAS MÚLTIPLAS DA FREQUÊNCIA FUNDAMENTAL. ISSO NÃO É VÁLIDO PARA $X(e^{j\omega})$. CONCLUÍMOS, DE IMEDIATO, QUE $x[n]$ É NÃO PERIÓDICO

2) USANDO AS PROPRIEDADES DE SIMETRIA DAS T. F. D. SABEMOS QUE UMA SEQUÊNCIA REAL DEVE SER UMA TRANSFORMADA CUJO MÓDULO SEJA PAR E CUJO ARGUMENTO SEJA ÍMPAR. TAL É VERDADE PARA $|X(e^{j\omega})|$ E $\arg X(e^{j\omega})$. CONCLUÍMOS, ENTÃO, QUE $x[n]$ É REAL.

3) SE $x[n]$ É UMA FUNÇÃO PAR ENTÃO PELAS PROPRIEDADES DE SIMETRIA $X(e^{j\omega})$ DEVE SER REAL E PAR. DADO QUE $X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|\cdot e^{-j2\omega}$, $X(e^{j\omega})$ NÃO É UMA FUNÇÃO REAL. LOGO, $x[n]$ NÃO É PAR

4) FINALMENTE PARA TESTAR SE A ENERGIA É FINITA PODEMOS USAR A RELAÇÃO DE PARSEVAL

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(x[n])^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|X(e^{j\omega})|^2\,d\omega$$

É ÓBVIO, BASTANDO OLHAR PARA O GRÁFICO DE $|X(e^{j\omega})|$, QUE O INTEGRAL AO LONGO DE UM PERÍODO É FINITO. LOGO $x[n]$ TEM ENERGIA FINITA

FOLHA 10

(3)

RESOLUÇÕES

IE)

RESPOSTA IMPULSIONAL:

$$h[n] = \delta[n - n_0]$$

RESPOSTA EM FREQUÊNCIA:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n-n_0] \cdot e^{-j\omega n} = e^{-jn\omega_0}$$

PARA UMA ENTRADA GERAL $x[n]$ COM T.F.D $X(e^{j\omega})$

A TRANSFORMADA DA SAÍDA É:

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

SE ENCONTRARMOS A F.T.D.I. OBTEMOS

$$Y[n] = x[n - n_0]$$ PELA PROPRIEDADE DA TRANSLACÇÃO

LOGO A SAÍDA É A ENTRADA TRASLADADA DE n_0.

x)

$$h[n] = \alpha^n u[n] \qquad |\alpha| < 1$$

$$x[n] = \beta^n u[n] \qquad |\beta| < 1$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \beta e^{-j\omega}}$$

LOGO:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\omega})(1 - \beta e^{-j\omega})}$$

USANDO O MÉTODO DAS FRACÇÕES PARCIAIS

E OS COEFICIENTES INDETERMINADOS OBTEMOS:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{1 - \alpha e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - \beta e^{-j\omega}}$$

ENCONTRAMOS:

$$A = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \qquad B = -\frac{\beta}{\alpha - \beta}$$

RESOLUÇÕES

A TRANSFORMADA INVERSA DE $Y(e^{j\omega})$ VALE:

$$y[n] = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\alpha^n u[n] - \frac{\beta}{\alpha-\beta}\beta^n u[n] =$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\alpha^{n+1}u[n] - \beta^{n+1}u[n]\right]$$

PARA $\alpha=\beta$ TEMOS

$$Y(e^{j\omega}) = \left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)^2 =$$

$$= \frac{j}{\alpha} e^{j\omega}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)$$

USANDO A PROPRIEDADE DA DIFERENCIAÇÃO OBTEMOS

$$\alpha^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

$$n\alpha^n u[n] \longleftrightarrow j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)$$

$$(n+1)\alpha^{n+1}u[n+1] \longleftrightarrow j e^{j\omega}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)$$ PROPRIEDADE DA TRANSLAÇÃO

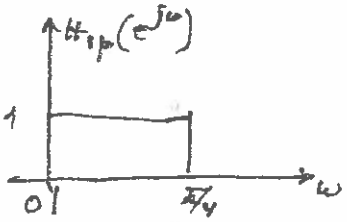
LOGO:

$$y[n] = (n+1)\alpha^n u[n+1]$$

QUE COMO É EVIDENTE PODE SER ESCRITA NA FORMA

$$y[n] = (n+1)\alpha^n u[n]$$

XII) FILTROS PASSA-BAIXO IDEAIS COM FREQUÊNCIA DE CORTE $\pi/4$ E GANHO UNITÁRIO



CONSIDEREMOS EM 1º LUGAR O

RESTO DE CIMA

NOTE-SE QUE $(-1)^n = e^{j\pi n}$

$$W_1[n] = e^{j\pi n}x[n]$$

LOGO $$W_1(e^{j\omega}) = X\,e^{(j(\omega-\pi))}$$ TRANSLACÇÃO NO DOMÍNIO DOS W's

RESOLUÇÕES

$$W_3[n] = e^{j\pi n} W_2[n]$$

$$W_3(e^{j\omega}) = W_2(e^{j(\omega-\pi)}) =$$

$$= H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) \, X(e^{j(\omega-2\pi)})$$

$$W_3(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) \cdot X(e^{j\omega})$$

POIS A TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA NO TEMPO É PERIÓDICA DE PERÍODO 2π

PARA O RAMO DE BAIXO TEMOS:

$$W_4(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$$

USANDO A LINEARIDADE TEMOS

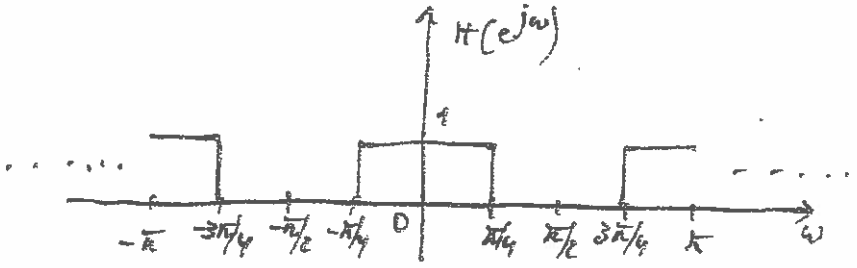
$$Y(e^{j\omega}) = W_3(e^{j\omega}) + W_4(e^{j\omega}) =$$

$$= [H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) + H_{lp}(e^{j\omega})] X(e^{j\omega})$$

A RESPOSTA EM FREQUÊNCIA É:

$$H(e^{j\omega}) = [H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) + H_{lp}(e^{j\omega})]$$

E ENCONTRA-SE REPRESENTADA NA FIGURA ABAIXO



TRATA-SE FISICAMENTE DE UM FILTRO QUE ELIMINA COMPLETAMENTE TODOS OS SINAIS COM FREQUÊNCIAS ENTRE $\pi/4$ E $3\pi/4$ (BANDSTOP IDEAL FILTER).

RESOLUÇÕES

XII)

$$x[n] = x_1[n] \cdot x_2[n]$$

$$x_1[n] = \frac{\operatorname{sen}(3\pi n/4)}{\pi n}$$

$$x_2[n] = \frac{\operatorname{sen}(\pi n/2)}{\pi n}$$

$X(e^{j\omega})$ É A "CONVOLUÇÃO" DE $X_1(e^{j\omega})$ COM $X_2(e^{j\omega})$ ONDE TOMAMOS UM INTERVALO DE INTEGRAÇÃO DE COMPRIMENTO 2π (POR EXEMPLO, $-\pi \le \omega \le \pi$)

LOGO:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta})\, X_2\left(e^{j(\omega-\theta)}\right) d\theta$$

DEFININDO UMA FUNÇÃO $\hat{X}_1(e^{j\omega})$ NA FORMA

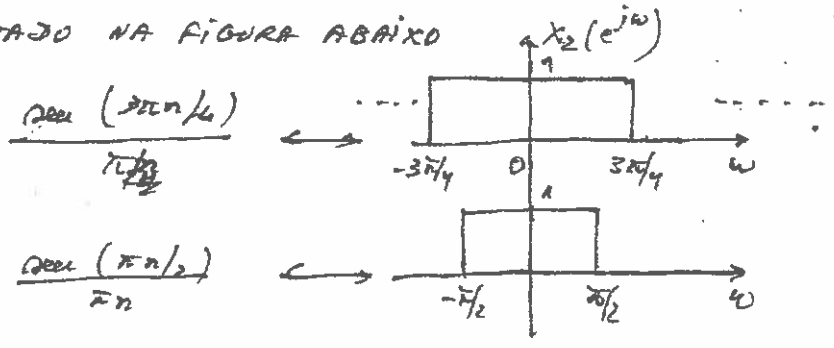
$$\hat{X}_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} X_1(e^{j\omega}) & -\pi \le \omega \le \pi \\ 0 & \text{NOS OUTROS } \omega\text{'S} \end{cases}$$

O INTEGRAL ANTERIOR TRANSFORMA-SE NUMA "VERDADEIRA" CONVOLUÇÃO

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{X}_1(e^{j\theta})\, X_2\left(e^{j(\omega-\theta)}\right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(e^{j\theta})\, X_2\left(e^{j(\omega-\theta)}\right) d\theta$$

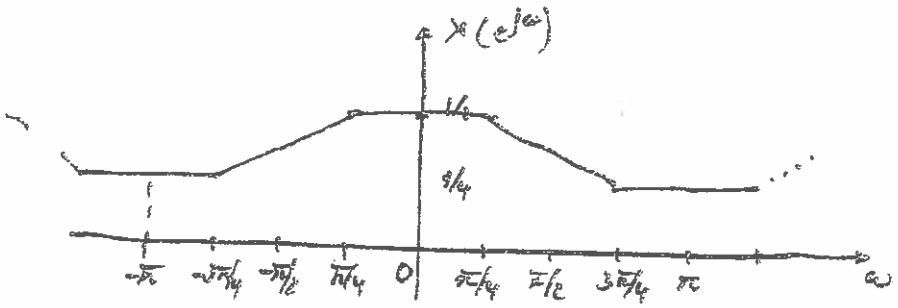
O RESULTADO DESTA CONVOLUÇÃO (DE 2 PEDESTAL) É DE OUTRO PEDESTAL DE DIFERENTE LARGURA E PERIÓDICO ENCONTRA-SE REPRESENTADO NA FIGURA ABAIXO



FOLHA 10

(11)

RESOLUÇÕES



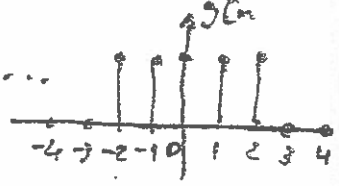
XIII)

SINAL PERIÓDICO $x[n]$ — PERÍODO $N = 9$

$$c[n] = \begin{cases} \frac{1}{9}\frac{\text{sen}(5\pi n/9)}{\text{sen}(\pi n/9)} & n \neq 9 \\ 5/9 & n = 9 \end{cases}$$

CONSIDEREMOS UMA FUNÇÃO $g[n]$ RECTANGULAR DE PERÍODO $N = 9$ TAL QUE

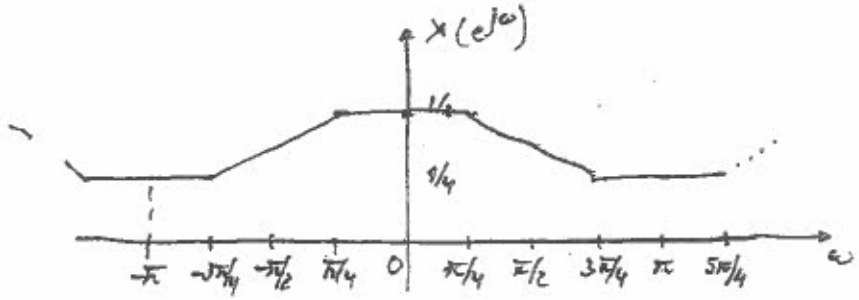
$$g[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq 2 \\ 0 & 2 < |n| \leq 4 \end{cases}$$



OS COEFICIENTES DA SUA SÉRIE DE FOURIER SÃO

$$b_k = \begin{cases} \frac{1}{9}\cdot\frac{\text{sen}(5\pi k/9)}{\text{sen}(\pi k/9)} & k \neq 9 \\ \frac{5}{9} & k = 9 \end{cases}$$

RESOLUÇÕES



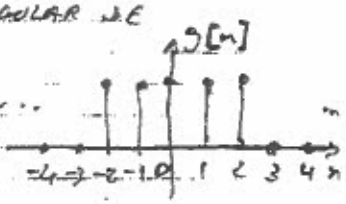
XIII)

SINAL PERIÓDICO $x[n]$ — PERÍODO $N=9$

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{9}\frac{\operatorname{sen}(5\pi n/9)}{\operatorname{sen}(\pi n/9)} & n \neq 9 \\ 5/9 & n = 9 \end{cases}$$

CONSIDEREMOS UMA FUNÇÃO $g[n]$ RECTANGULAR DE PERÍODO $N=9$ TAL QUE

$$g[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq 2 \\ 0 & 2 < |n| \leq 4 \end{cases}$$



OS COEFICIENTES DA SUA SÉRIE DE FOURIER SÃO:

$$b_k = \begin{cases} \frac{1}{9}\cdot\frac{\operatorname{sen}(5\pi k/9)}{\operatorname{sen}(\pi k/9)} & k \neq 9 \\ \frac{5}{9} & k = 9 \end{cases}$$

A SÉRIE DE FOURIER DE $g[n]$ PODE SER ESCRITA

$$b_k = \frac{1}{9}\sum_{n=-2}^{2}(1)\cdot e^{-j2\pi nk/9}$$

$k \to n$ E ATENDENDO A QUE $x[n] = b_n$, ENCONTRAMOS:

$$x[n] = \frac{1}{9}\sum_{k=-2}^{2}(1)\,e^{-j2\pi nk/9}$$

FAZENDO $k' = -k$ NA SOMA OBTEMOS:

$$x[n] = \frac{1}{9}\sum_{k=-2}^{2} e^{+j2\pi nk'/9}$$

OS COEFICIENTES DE FOURIER DE $x[n]$ SÃO, ENTÃO, DADOS POR:

$$a_k = \begin{cases} 1/9 & |k| \leq 2 \\ 0 & 2 < |k| \leq 4 \end{cases}$$

QUE SÃO, OBVIAMENTE 9 PERIÓDICOS COM PERÍODO $N=9$.

FOLHA 10 (12)

RESOLUÇÕES

XIV)

$$x[n] = \frac{\text{sen}(\pi n/2)}{\pi n}$$

CÁLCULO DA SUA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA

USEMOS A DUALIDADE

SE USARMOS A FUNÇÃO CONTÍNUA NO TEMPO E PERIÓDICA DEFINIDA POR

$$g(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T_1 \\ 0 & T_1 < |t| \leq \pi \end{cases}$$

OS SEUS COEFICIENTES DA SÉRIE DE FOURIER SÃO:

$$a_k = \frac{\text{sen}(kT_1)}{\pi k}$$

SE TOMARMOS $T_1 = \pi/2$ TEMOS $a_k = x[k]$

A EQUAÇÃO DE ANÁLISE PARA $g(t)$ É:

$$\frac{\text{sen}(\pi k/2)}{\pi k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(t)\, e^{-jkt}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \cdot e^{-jkt}\, dt$$

COM: $k \to n$ $t \to \omega$ TEMOS:

$$\frac{\text{sen}(\pi n/2)}{\pi n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \cdot e^{-jn\omega}\, d\omega$$

COM $n \to -n$ TEMOS:

$$\frac{\text{sen}(\pi n/2)}{\pi n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \cdot e^{jn\omega}\, d\omega \qquad (\text{sinc}(x) \text{ É PAR})$$

ENTÃO FINALMENTE:

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

XV)

$$y[n] - a\, y[n-1] = x[n] \qquad |a| < 1$$

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a\, e^{-j\omega}}$$

$$y[n] \leftrightarrow Y(e^{j\omega})$$

$$y[n-1] \leftrightarrow e^{-j\omega} Y(e$$

RESOLUÇÕES

A RESPOSTA IMPULSIONAL DO SISTEMA É

$$h[n] = a^n \cdot u[n]$$

XVI)

$$y[n] - \frac{3}{4} y[n-1] + \frac{1}{8} y[n-2] = 2\,x[n]$$

É ÓBVIO QUE: $H(e^{j\omega}) = \dfrac{2}{1 - \frac{3}{4} e^{-j\omega} + \frac{1}{8} e^{-j2\omega}}$

$y[n] \leftrightarrow Y(e^{j\omega})$

$y[n-1] \leftrightarrow e^{-j\omega} Y(e$

$y[n-2] \leftrightarrow e^{-2j\omega} Y(e$

FACTORIZANDO O DENOMINADOR TEMOS:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}\right)}$$

USANDO A DECOMPOSIÇÃO EM FRACÇÕES SIMPLES TEMOS:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{4}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}}$$

A TRANSFORMADA INVERSA DE CADA FRACÇÃO CONDUZ POR INSPECÇÃO À RESPOSTA IMPULSIONAL DO SISTEMA NA FORMA:

$$h[n] = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

XVII)

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u[n]$$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) = \left[\frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right) e^{-j\omega}\left(1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}\right)}\right] \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}}\right)$$

$$= \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}\right)^2}$$

A DECOMPOSIÇÃO EM FRACÇÕES SIMPLES CONDUZ, NESTE CASO, A:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}} + \frac{B}{\left(1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}\right)^2} + \frac{C}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}}$$

COM

$$A = -4 \qquad B = -2 \qquad C = 8$$

PRESTE MUITA ATENÇÃO

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(0)\,\delta(t)\,dt =$$

$$= f(0)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt = f(0)$$

(TRATA-SE DE UM NÚMERO – VALOR DA FUNÇÃO NA ORIGEM – E NÃO DE UM DIRAC COMO ATRÁS)

PELAS MESMAS CONSIDERAÇÕES:

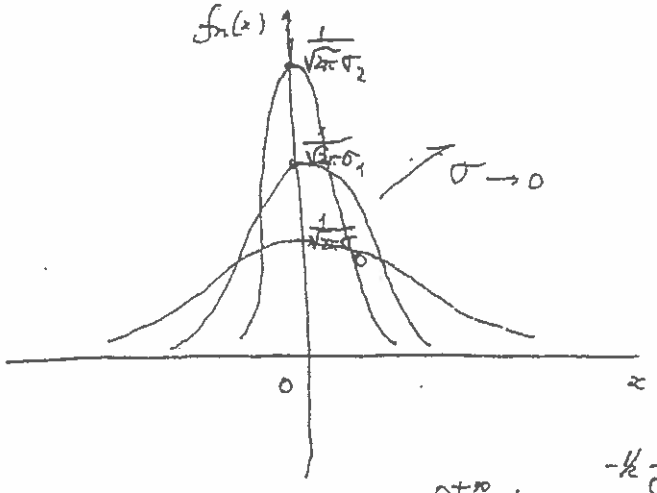
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$$

NOTE-SE QUE A DISTRIBUIÇÃO DE DIRAC É PAR:

$$\delta(-t) = \delta(t) \qquad \text{(LIMITE DE FUNÇÕES PARES)}$$

LOGO PODE SER, POR EXEMPLO, GERADA COMO LIMITE DE UMA SUCESSÃO DE FUNÇÕES DE GAUSS (PROBABILIDADE) QUANDO O DESVIO PADRÃO DESTA DISTRIBUIÇÃO TENDE PARA ZERO

$$\delta(x) = \lim_{\sigma\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}}$$



$\sigma_0 > \sigma_1 > \sigma_2$

$A = 1$

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}} = 1$$

I) a) i) DETERMINE A TRANSFORMADA DE FOURIER DO SINAL CONTÍNUO

$$f(t) = e^{-|t|}$$

ii) USANDO UMA PROPRIEDADE DE MODULAÇÃO DETERMINE A TRANSFORMADA DE FOURIER DE

$$g(t) = t \cdot f(t)$$

iii) DETERMINE A TRANSFORMADA DE FOURIER DO SINAL DISCRETO

$$x[n] = \frac{\operatorname{sen}(\pi n/5)}{\pi n} \cos\left[\frac{2\pi n}{5}\right]$$

II) a) DETERMINE A RESPOSTA IMPULSIONAL DE UM SISTEMA LIT CUJA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA É:

$$H(j\omega) = \frac{\operatorname{sen}^2(3\omega)}{\omega^2} \cdot \cos\omega$$

b) SEJA UM SINAL $x(t)$ CUJA TRANSFORMADA DE FOURIER É:

$$X(j\omega) = \delta(\omega) + \delta(\omega - \pi) + \delta(\omega - 5)$$

E SEJA $h(t) = u(t) - u(t-2)$

COMENTE QUANTO À PERIODICIDADE OS SINAIS $x(t)$, $h(t)$ E $y(t) = x(t) * h(t)$. SE $x(t) = \operatorname{sen}(\pi t) + \cos(3\pi t)$ QUAL SERÁ A SAÍDA $y(t)$?

III) a) UM SISTEMA CUJA RESPOSTA IMPULSIONAL É $h_1[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u[n]$ É LIGADO EM PARALELO A UM OUTRO SISTEMA CUJA RESPOSTA IMPULSIONAL É $h_2[n]$. O CONJUNTO APRESENTA UMA RESPOSTA IMPULSIONAL DA FORMA:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{-12 + 5e^{-j\omega}}{12 - 7e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}}$$

DETERMINE $h_2[n]$.

b) DETERMINE A RESPOSTA IMPULSIONAL DO SISTEMA DE MENOR ORDEM DO SISTEMA QUE OBEDECE À EQUAÇÃO ÀS DIFERENÇAS FINITAS

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{3}x[n-1]$$

I) a) DETERMINE A TRANSFORMADA DE FOURIER DA FUNÇÃO $f(t)$, CONTÍNUA NO TEMPO E REPRESENTADA NA FIG. 1.
(USE 3 MÉTODOS DISTINTOS PARA O FAZER.)

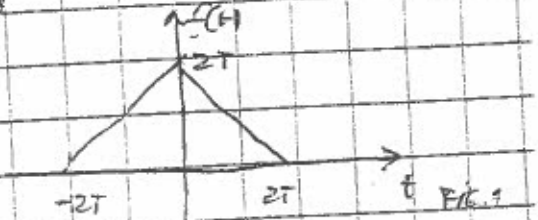


FIG. 1

b) DETERMINE A TRANSFORMADA DE FOURIER DA FUNÇÃO DISCRETA $x[n]$, REPRESENTADA NA FIG. 2

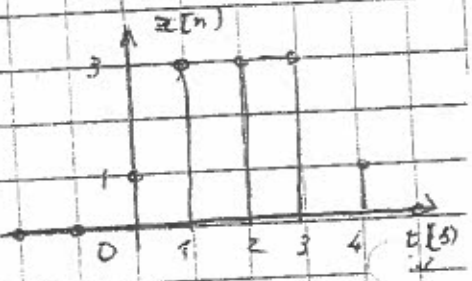


FIG. 2

c) DEFINA O QUADRADO DA FUNÇÃO DE DIRAC POR $\delta^2(t) = \delta(t) \cdot \delta(t)$
DETERMINE A SUA TRANSFORMADA DE FOURIER. COMENTE O RESULTADO OBTIDO

II) a) DETERMINE GRAFICAMENTE A DERIVADA NO DOMÍNIO DOS TEMPOS A T.F. DA FUNÇÃO REPRESENTADA NA FIG. 3

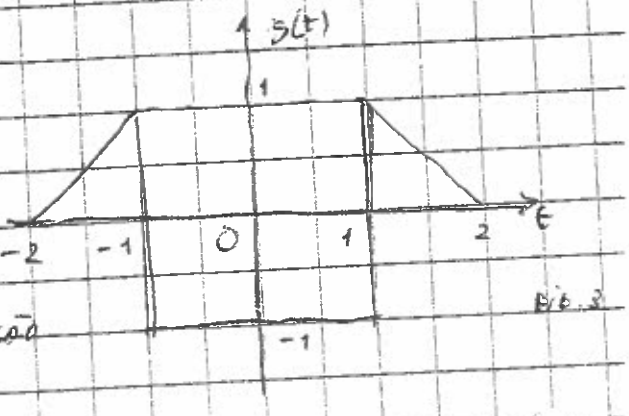


FIG. 3

b) DETERMINE A T.F DE $F(j\omega)$ DA FUNÇÃO $f(t)$ RESULTANTE DA CONVOLUÇÃO DAS FUNÇÕES $f_1(t)$ E $f_2(t)$:

$$f(t) = f_1(t) \otimes f_2(t) \quad \text{com}$$

$$f_1(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t} \quad \text{E} \quad f_2(t) = e^{-j10t} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}$$

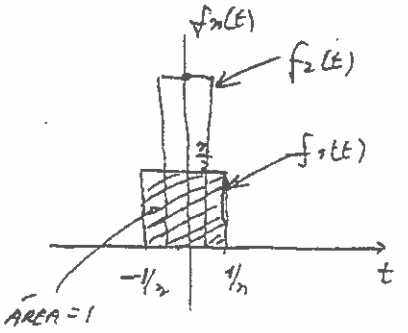
1' APÊNDICE 1 :

PROPRIEDADES DA FUNÇÃO DE DIRAC (DISTRIBUIÇÃO)

DEFINIÇÃO :

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{n}{2} & |t| < \frac{1}{n} \\ 0 & |t| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\text{ÁREA} = \int_{-1/n}^{1/n} f_n(t)\,dt = \int_{-1/n}^{1/n} \frac{n}{2}\,dt = 1$$

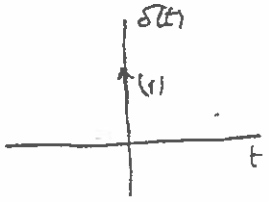


LOGO: $\delta(t) = \lim_{n \to \infty} f_n(t)$

(NO LIMITE, $n \to \infty$ DÁ O DIRAC DE ALTURA 1)

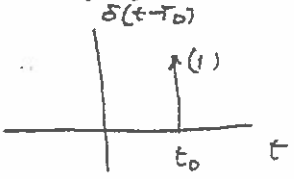
1ª PROPRIEDADE

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$$



DE MODO ANÁLOGO E COMO GENERALIZAÇÃO

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)\,dt = 1$$

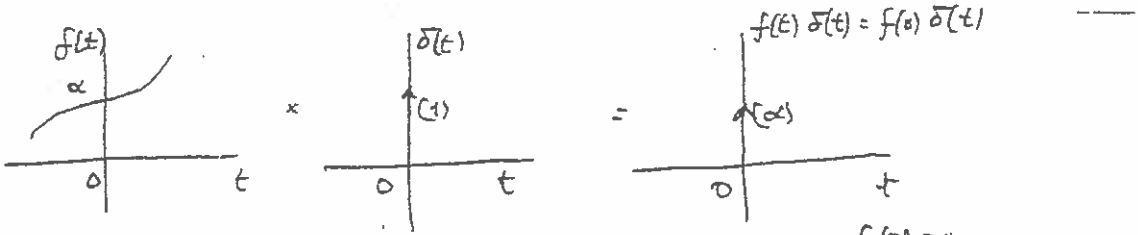


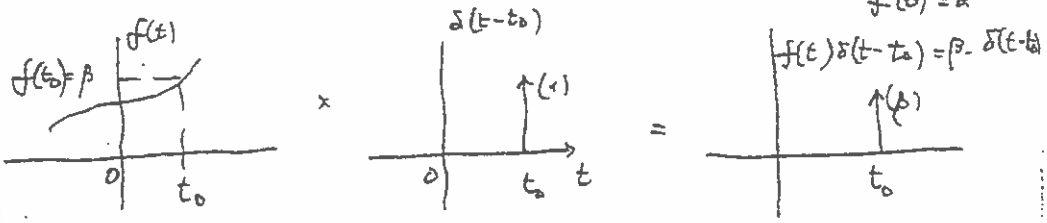
ENTÃO :

$$f(t)\,\delta(t) = f(0)\cdot\delta(t) \qquad \text{(DIRAC DE ALTURA } f(0), \text{ NA ORIGEM)}$$

DE MODO ANÁLOGO :

$$f(t)\,\delta(t - t_0) = f(t_0)\cdot\delta(t - t_0) \qquad \text{(DIRAC DE ALTURA } f(t_0), \text{ NO PONTO } t_0)$$





Transformada de Laplace

FOLHA II

SINAIS E SISTEMAS

Só para o interessado

I) DADO O SINAL $x(t) = e^{-at}u(t)$ (CAUSAL) DETERMINE A SUA TRANSFORMADA DE LAPLACE IMPONDO CONDIÇÕES DE CONVERGÊNCIA

Não dei no ponto

II) IDEM PARA

$$x(t) = -e^{-at}u(-t)$$

III) IDEM PARA

$$x(t) = 3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)$$

IV) IDEM PARA

$$x(t) = e^{-at}.u(t) + e^{-t}.\cos(\omega t).u(t)$$

V) IDEM PARA

$$x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t)$$

VI) IDEM PARA

$$x(t) = e^{-b|t|}$$

VII) DETERMINE A TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE DE:

$$X(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} \qquad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

VIII) IDEM PARA

$$X(s) = \frac{1}{s^2+5s+6} \qquad \mathrm{Re}\{s\} < -2$$

IX) DETERMINAR A TRANSFORMADA DE LAPLACE DE:

$$x(t) = t.e^{-at}u(t)$$

X) DETERMINAR A TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE DE:

$$X(s) = \frac{2s^2+5s+5}{(s+1)^2(s+2)}$$

FOLHA II

SINAIS E SISTEMAS

XI) CONSIDERE O SINAL

$$x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}\cos(3t)\,u(t)$$

MOSTRE QUE $x(0^+) = 2$ USANDO O TEOREMA DO LIMITE INICIAL (SERVE COMO VERIFICAÇÃO DE QUE O CÁLCULO DA TRANSFORMADA ESTÁ CORRECTO).

XII) VERIFICAR SE O SISTEMA CUJA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA (NO DOMÍNIO DE LAPLACE É):

$$H(s) = \frac{e^{1}}{s+1} \qquad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

É OU NÃO CAUSAL.

XIII) CONSIDERE UM SISTEMA LTI CUJA ENTRADA $x(t)$ E SAÍDA $y(t)$ ESTÃO RELACIONADAS PELA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE PRIMEIRA ORDEM COM COEFICIENTES CONSTANTES DA FORMA:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$$

DETERMINE A CORRESPONDENTE FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA E AS RESPOSTAS IMPULSIONAIS CAUSAIS E NÃO CAUSAIS

XIV) UM CIRCUITO RLC SÉRIE É CARACTERIZADO PELA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE 2ª ORDEM DE COEFICIENTES CONSTANTES

$$RC\frac{dy}{dt} + LC\frac{d^2y}{dt^2} + y(t) = x(t)$$

DETERMINE A RESPECTIVA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

XV) UM SISTEMA LTI RESPONDE A UMA ENTRADA DA FORMA

$$x(t) = e^{-3t}u(t)$$

COM UMA SAÍDA DA FORMA:

$$y(t) = \left[e^{-t} - e^{-2t}\right] \cdot u(t)$$

DETERMINE A RESPECTIVA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA E A EQUAÇÃO DIFERENCIAL QUE REGE O COMPORTAMENTO DO SISTEMA

XVI) É CONHECIDA A SEGUINTE INFORMAÇÃO SOBRE UM SISTEMA LTI

1. O SISTEMA É CAUSAL
2. A FUNÇÃO DO SISTEMA É RACIONAL E SÓ TEM 2 PÓLOS PARA $\lambda = -2$ E $\delta = 4$.
3. SE $x(t) = 1$, ENTÃO $y(t) = 0$
4. O VALOR DA RESPOSTA IMPULSIONAL PARA $t = 0^+$ É 4

DETERMINE A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO SISTEMA.

XVII) CONSIDERE O SINAL

$$x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t)$$

DETERMINE A SUA TRANSFORMADA DE LAPLACE UNILATERAL

XVIII) DETERMINE A TRANSFORMADA DE LAPLACE UNILATERAL DE

$$x(t) = e^{-a(t+1)} \cdot u(t+1)$$

E COMPARE-A COM A CORRESPONDENTE TRANSFORMADA BILATERAL

XIX) DETERMINE A TRANSFORMADA UNILATERAL DE LAPLACE DE:

$$x(t) = \delta(t) + 2u_1(t) + e^{t} u(t)$$