No nosso caso temos o analógico discreto deste caso contínuo e cuja equação às diferenças finitas é:

$$y[n] + a\,y[n-1] + b\,y[n-2] = x[n]$$

$$y[n] - \frac{3}{4}\,y[n-1] + \frac{1}{8}\,y[n-2] = x[n]$$

Vejamos, realizando "à brota", quais são os termos da solução da equação com $x[n] = \delta[n]$ $\quad y[-1] = 0$ $\quad y[-2] = 0$

$$y[0] = \underset{0}{\frac{3}{4}\,y[-1]} - \underset{0}{\frac{1}{8}\,y[-2]} + \underset{1}{x[0]} = 1$$

$$y[1] = \frac{3}{4}\,y[0] - \frac{1}{8}\,y[-1] + x[\,] = \frac{3}{4}\times 1 - \frac{1}{8}\times 0 + 0 = \frac{3}{4}$$

$$y[2] = \frac{3}{4}\,y[\,] - \frac{1}{8}\,y[0] + x[2] = \frac{3}{4}\,\frac{3}{4} - \frac{1}{8}\times 1 + 0 \quad = \frac{9}{16} - \frac{1}{8} = \frac{7}{16}$$

$$y[3] = \frac{3}{4}\times\frac{7}{16} - \frac{1}{8}\times\frac{3}{4} + 0 = \ldots$$

Não é absolutamente trivial mostrar que para todo o n tal é equivalente a:

$$y[n] = \left[2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] u[n]$$

Mais tarde no curso iremos estudar este e outros problemas mais gerais ainda das equações às diferenças finitas

A SAÍDA É:

$$y(t) = e^{j2(t-3)} = e^{-j6} e^{j2t}$$

e^{j2t} É UMA FUNÇÃO PRÓPRIA E O VALOR PRÓPRIO CORRESPONDENTE É $H(2j) = e^{-6j}$

DE FACTO, A RESPOSTA IMPULSIONAL DO SISTEMA É:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-3)\, e^{-st}\, dt = e^{-3s}$$

E, PORTANTO, $H(2j) = e^{-3\times 2j} = e^{-j6}$

---

b) CONSIDEREMOS O SINAL:

$$x(t) = \cos(4t) + \cos(\pi t)$$

A RESPOSTA DO SISTEMA CONDUZ A:

$$y(t) = \cos(4(t-3)) + \cos(\pi(t-3))$$

EXPANDINDO $x(t)$ NA FORMA DE EULER

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{j4t} + \frac{1}{2}e^{-j4t} + \frac{1}{2}e^{j\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j\pi t}$$

A SAÍDA É (TENDENDO EM DISCUSSÃO DE a)

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-j12}e^{j4t} + \frac{1}{2}e^{j12}e^{-j4t} + \frac{1}{2}e^{-j3\pi}e^{j\pi t} + \frac{1}{2}e^{j3\pi}e^{-j\pi t}$$

AGRUPANDO TERMOS TEMOS:

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{j4(t-3)} + \frac{1}{2}e^{-j4(t-3)} + \frac{1}{2}e^{j\pi(t-3)} + \frac{1}{2}e^{-j\pi(t-3)} =$$

$$= \cos(4(t-3)) + \cos(\pi(t-3))$$

NOTE-SE QUE $H(4j) = e^{-12j}$ E $H(\pi j) = e^{-3\pi j}$

III) SE REESCREVERMOS A EQUAÇÃO DADA E ASSOCIARMOS CADA UMA DAS COMPONENTES HARMÓNICAS QUE PRODUZEM A MESMA FREQUÊNCIA OBTEMOS:

VI) A FUNÇÃO PERIÓDICA RECTANGULAR REPRESENTADA NA FIG. 1 PODE SER ESCRITA AO LONGO DE UM PERÍODO T POR:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$

FREQUÊNCIA FUNDAMENTAL: $\omega_0 = 2\pi/T$

DADO QUE $x(t)$ TEM SIMETRIA EM RELAÇÃO A YY' CONVEM USAR O INTERVALO $t \in [-T/2, T/2]$ COMO INTERVALO DE INTEGRAÇÃO.

PARA $k=0$ TEMOS:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{T_1}{T} \quad \text{(VALOR MÉDIO DA FUNÇÃO)}$$

PARA $k \neq 0$ OBTEMOS:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} 1 \cdot e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \left[-\frac{1}{jk\omega_0 T} e^{-jk\omega_0 t} \right]_{-T_1}^{T_1} =$$

$$= \frac{2}{k\omega_0 T}\left[\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j} \right] =$$

$$= \frac{2\,\mathrm{sen}(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} = \frac{\mathrm{sen}(k\omega_0 T_1)}{k\pi} \quad (\omega_0 T = 2\pi)$$

COMO OS COEFICIENTES SÃO REAIS PODEM SER REPRESENTADOS SÓ EM AMPLITUDE (O FASE OU É 0 SE OS COEFICIENTES SÃO >0 OU π SE OS COEFICIENTES SÃO <0).

PARA $T = 4T_1$ $x(t)$ TRANSFORMA-SE NUMA ONDA QUADRADA; NESTE CASO, TEMOS $\omega_0 T = \pi/2$ E RESULTA PARA OS COEFICIENTES:

$$a_k = \frac{\mathrm{sen}(\pi k/2)}{\pi k} \qquad k \neq 0$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \qquad a_k = 0 \quad \text{PARA } k \text{ PAR}$$

OS TERMOS ÍMPARES SÃO ALTERNADAMENTE POSITIVOS E NEGATIVOS.

VII) NOTE-SE QUE A DERIVADA DO SINAL REPRESENTADO CORRESPONDE AO SINAL REPRESENTADO NO EXERCÍCIO III).

SE CHAMARMOS AOS COEFICIENTES DE $g(t)$ d_k E AOS DE $x(t)$ c_k VEM QUE PELA PROPRIEDADE DA DIFERENCIAÇÃO:

$$d_k = j k (\omega_0/2)\, c_k$$

ESTA RELAÇÃO É VÁLIDA PARA TODOS OS COEFICIENTES EXCEPTO PARA $k=0$ (O VALOR MÉDIO DA FUNÇÃO NÃO É NULO - COMO TAMBÉM ENVOLVIDA NA INTEGRAÇÃO)

RESULTA FINALMENTE:

$$c_0 = 0/2$$

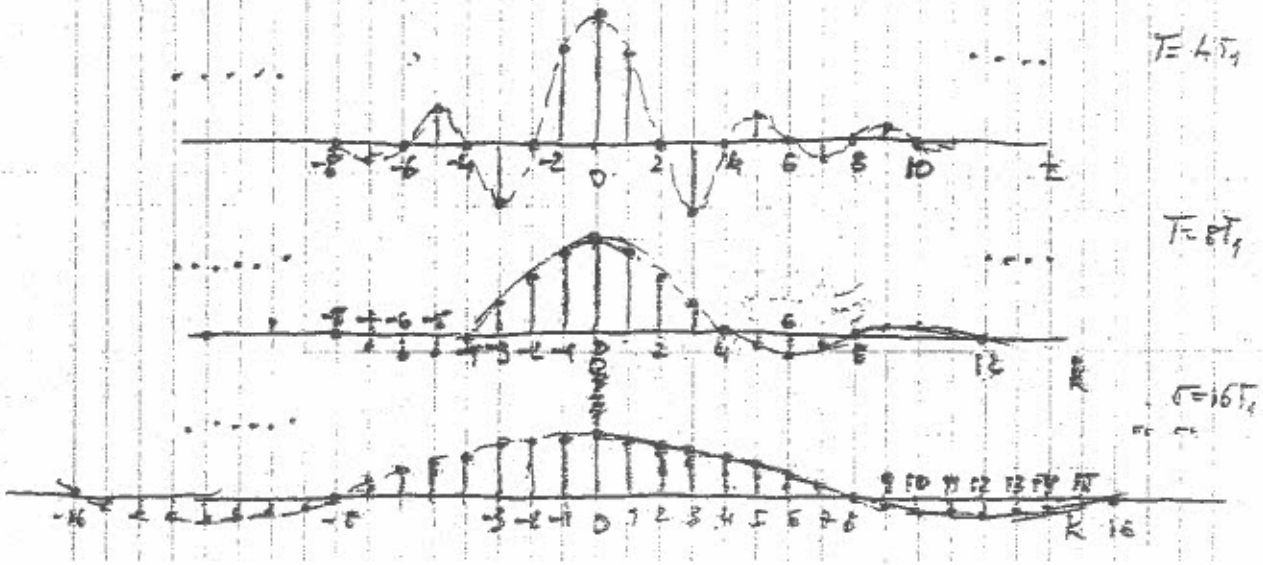
$$c_k = \frac{2\,d_k}{jk\pi} = \frac{2\,\mathrm{sen}(\pi k/2)}{j(k\pi)^2}$$

NOTE-SE O DECRÉSCIMO DOS COEFICIENTES c_k COM k^2

$$|c_k| \propto \frac{1}{k^2}$$

NOTE-SE, AINDA, QUE DESCOLAR A FUNÇÃO NA VERTICAL (SOMAR-LHE UMA CONSTANTE) CORRESPONDE A VARIAR APENAS O COEFICIENTE DE ORDEM 0 DA SÉRIE DE FOURIER DO VALOR DA TRANSLACÇÃO.

GRÁFICOS CORRESPONDENTES AO EXERCÍCIO VI)



RELACIONEMOS O TREM DE IMPULSOS COM A ONDA RETANGULAR CONSIDERADA EM VI) ($g(t)$). A DERIVADA DESTA FUNÇÃO $\dot{g}(t)$ É $g(t)$ QUE ESTÁ REPRESENTADA EM c).

USANDO A PROPRIEDADE DA TRANSLAÇÃO E A LINEARIDADE, TEMOS QUE OS SEUS COEFICIENTES SÃO:

$$b_k = e^{jk\omega_0 T_1} \cdot a_k - e^{-jk\omega_0 T_1} \cdot a_k$$

ONDE a_k SÃO OS COEFICIENTES ATRÁS DETERMINADOS E $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

TEMOS, ENTÃO:

$$b_k = \frac{1}{T}\left[e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}\right] = \frac{2j\ \mathrm{sen}(k\omega_0 T_1)}{T}$$

(PURAMENTE IMAGINÁRIA. PORQUÊ?)

USA-SE A PROPRIEDADE DA DIFERENCIAÇÃO).

TEMOS:

$b_k = j k\omega_0 c_k$ ONDE c_k SÃO OS COEFICIENTES DO DESENVOLVIMENTO DE $g(t)$

$$c_k = \frac{b_k}{jk\omega_0} = \frac{2j\ \mathrm{sen}(k\omega_0 T_1)}{jk\omega_0 T} =$$

$$= \frac{2\,\mathrm{sen}(k\omega_0 T_1)}{k\pi} \quad (\alpha) \qquad k \neq 0 \text{ (CURIOSO!!)}$$

(DE MODO PURAMENTE REAL E PAR)

NOTE-SE QUE A EQUAÇÃO α) É VALIDA APENAS PARA $k \neq 0$ ($k=0$ É UM ZERO DO SEU DENOMINADOR)

MAS COMO c_0 É O VALOR MÉDIO DE $g(t)$ AO LONGO DE UM PERÍODO PODEMOS DETERMINÁ-LO POR INSPEÇÃO RESULTA NOS:

$$c_0 = \frac{2T_1}{T}$$

(O QUE CONDIZ AOS COEFICIENTES c_k JÁ CALCULADOS EM VI), USANDO OUTRO PROCESSO)

SINAIS E SISTEMAS

7ª AULA

I) CONSIDERE TRÊS SINAIS PERIÓDICOS E CONTÍNUOS DE TEMPO CUJA REPRESENTAÇÃO EM SÉRIE DE FOURIER SÃO AS SEGUINTES:

$$x_1(t) = \sum_{k=0}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot e^{j\frac{2\pi}{5}t}$$

$$x_2(t) = \sum_{k=100}^{100} \cos(k\pi) \cdot e^{jk\frac{2\pi}{5}t}$$

$$x_3(t) = \sum_{k=-100}^{100} j\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) e^{jk\frac{2\pi}{5}t}$$

USE AS PROPRIEDADES DAS SÉRIES DE FOURIER PARA RESPONDER ÀS SEGUINTES PERGUNTAS:

a) QUAL(AIS) DESTES 3 SINAIS É(SÃO) DE VALORES REAIS?
b) QUAL (AIS) DOS 3 SINAIS É (SÃO) PARES?

II) SEJA $x[n]$ UM SINAL REAL E PAR COM PERÍODO $N=7$ E SÉRIES DE FOURIER a_k DADOS POR:

$$a_{15} = j \;;\; a_{16} = 2j \;;\; a_{17} = 3j$$

DETERMINE OS VALORES DE a_0, a_{-1}, a_{-2} e a_3

III) AS DUAS SEQUÊNCIAS $x_1[n]$ E $x_2[n]$ TÊM UM PERÍODO $N=4$ E OS CORRESPONDENTES COEFICIENTES DA SÉRIE DE FOURIER ESTÃO ESPECIFICADOS DO SEGUINTE MODO:

$$x_1[n] \leftrightarrow a_k \qquad x_2[n] = b_k$$

ONDE:

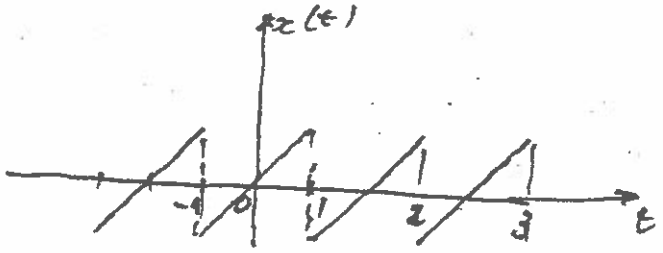
$$a_0 = a_3 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}a_2 = 1 \qquad \text{E}$$

$$b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 1$$

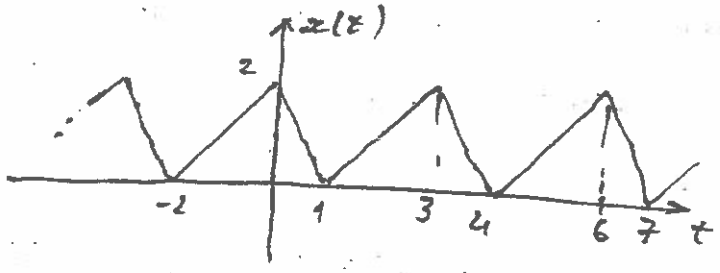
USANDO A PROPRIEDADE DA MULTIPLICAÇÃO, DETERMINE OS COEFICIENTES DA SÉRIE DE FOURIER, c_k, PARA O SINAL

$$g[n] = x_1[n] \cdot x_2[n]$$

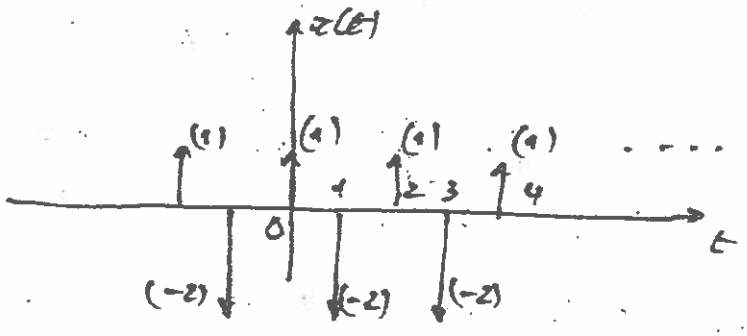
b)



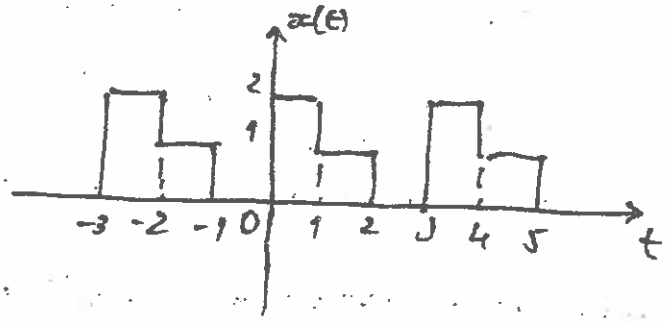
c)



d)



e)



III) CONSIDERE O SINAL

$$x(t) = e^{-at} \cdot u(t) \quad ; \quad a>0$$

DETERMINE A SUA TRANSFORMADA DE FOURIER E EFECTUE UM ESBOÇO GRÁFICO DO SEU MÓDULO E DA SUA FASE.

IV) CONSIDERE O SINAL

$$x(t) = e^{-a|t|} \quad ; \quad a>0$$

DETERMINE O DIAGRAMA DOS MÓDULOS E DAS FASES DA SUA TRANSFORMADA DE FOURIER.