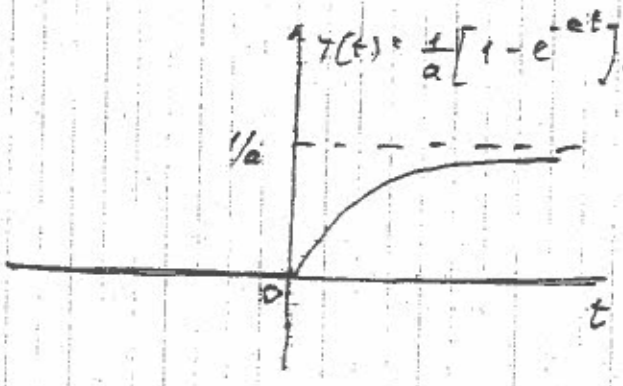
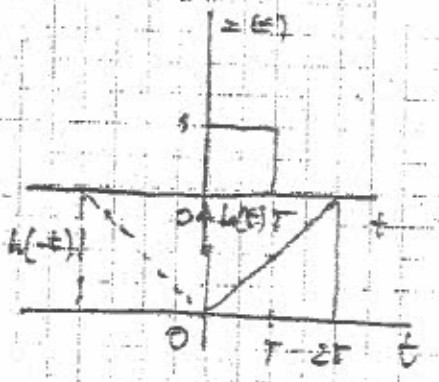


XI)

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & \text{NOS OUTROS } t\text{'s} \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 2T \\ 0 & \text{IDEM} \end{cases}$$

PARA $t \leq 0$ E PARA $t \geq 3T$ $x(\tau)\,h(t-\tau) = 0$ PARA TODOS OS VALORES DE τ E CONSEQUENTEMENTE $y(t) = 0$ (VER FIG. ABAIXO INSERIDA. NOTE-SE QUE A LEITURA DO SINAL DE CONVOLUÇÃO VAI SER A SOMA DAS LEITURAS DOS SINAIS E CONVOLUI R [LOGO $2T + T = 3T$])



$0 < t \leq T$

$$y(t) = \int_0^t (t-\tau)\,d\tau = \left[t\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_0^t =$$

$$= t^2 - \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}t^2$$

(PARÁBOLA)

$T < t \leq 2T$

$$y(t) = \int_{t-T}^{t} (t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \left[t\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_{t-T}^{t} = Tt - \frac{1}{2}T^2$$

(LINEAR)

$2T < t \leq 3T$

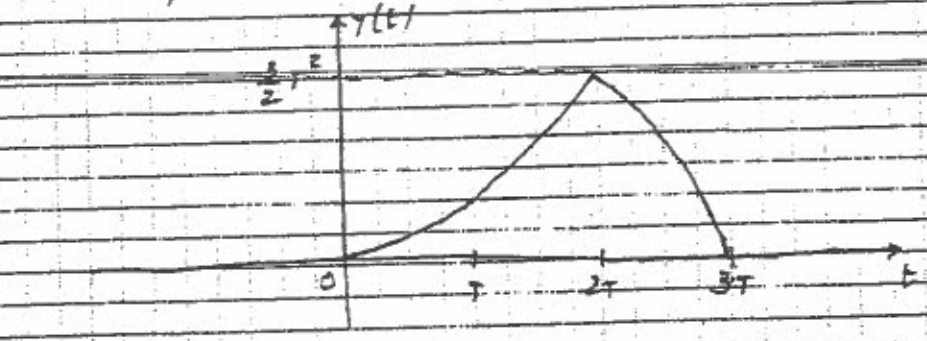
$$y(t) = \int_{t-2T}^{T} (t-\tau)\,d\tau = \left[t\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_{t-2T}^{T} = -\frac{1}{2}t^2 + Tt + \frac{3}{2}T^2$$

(PARÁBOLA)

RESUMINDO:

$$y(t): \begin{cases} 0 & t<0 \\ \frac{1}{2}t^2 & 0<t<T \\ Tt - \frac{1}{2}T^2 & T<t<2T \\ -\frac{1}{2}t^2 + Tt + \frac{3}{2}t^2 & 2T<t<3T \\ 0 & t>3T \end{cases}$$

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA:



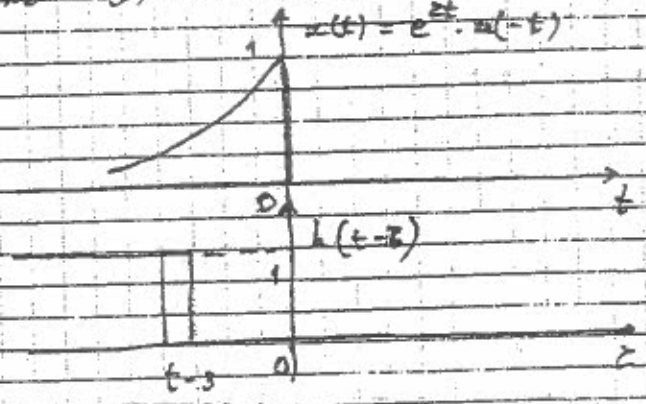
VII)

$$x(t) = e^{2t}\, u(-t)$$

$$h(t) = u(t-3)$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

OS SINAIS $x(t)$ E $h(t)$ ESTÃO REPRESENTADOS ABAIXO



NOTE-SE QUE NESTE CASO É INDEPENDENTE DE t NÃO SEMPRE SOBREPOSIÇÃO DE $x(\tau)$ E $h(t-\tau)$

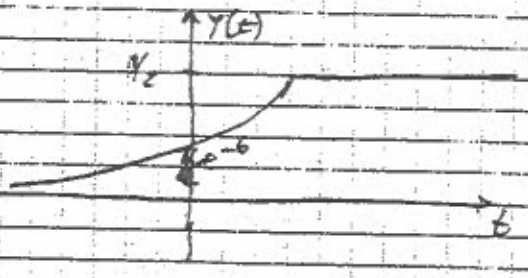
SE $t-3 \leq 0$; $t \leq 3$ TEMOS:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-3} e^{2\tau}\, d\tau = \frac{1}{2} e^{2(t-3)}$$

PARA $t-3 \geq 0$; $t \geq 3$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{2\tau}\, d\tau = \frac{1}{2}$$

O SINAL RESULTANTE ESTÁ INDICADO NA FIGURA.

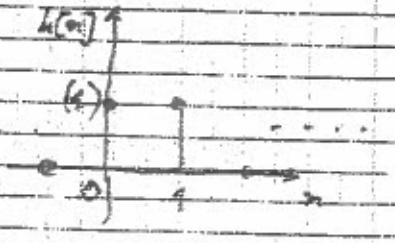


VIII)

RESPOSTA IMPULSIONAL DE UM SISTEMA:

$$h[n] = \begin{cases} 1 & n = 0, 1 \\ 0 & \text{NOS OUTROS VALORES DE } n \end{cases}$$

$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$$



SEJA $x[n]$ UM SINAL DE ENTRADA ARBITRÁRIO

TEMOS: $y[n] = x[n] \otimes [\delta[n] + \delta[n-1]] =$

$$= x[n] + x[n-1]$$

(LOGO A SAÍDA É A SOMA DE 2 TERMOS CONSECUTIVOS - O ATUAL E O IMEDIATAMENTE ANTERIOR)

CONTUDO, EXISTEM MUITOS SISTEMAS COM A MESMA RESPOSTA IMPULSIONAL. EXEMPLOS SÃO OS 2 SISTEMAS:

$$y[n] = \left(x[n] \cdot x[n-1]\right)^2 \quad \text{E}$$

$$y[n] = \text{MÁX}\left(x[n], x[n-1]\right)$$

SE O SISTEMA É NÃO LINEAR ELE NÃO É COMPLETAMENTE CARACTERIZADO PELA SUA RESPOSTA IMPULSIONAL

7x) $$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2^n u[-n]$$

$$h[n] = u[n]$$

PARA DETERMINAR A RESPOSTA DESSE SISTEMA À ENTRADA CONSIDERADA É CONVENIENTE USAR A PROPRIEDADE DISTRIBUITIVA DA CONVOLUÇÃO EM RELAÇÃO À SOMA DE FUNÇÕES:

TEMOS, ENTÃO:

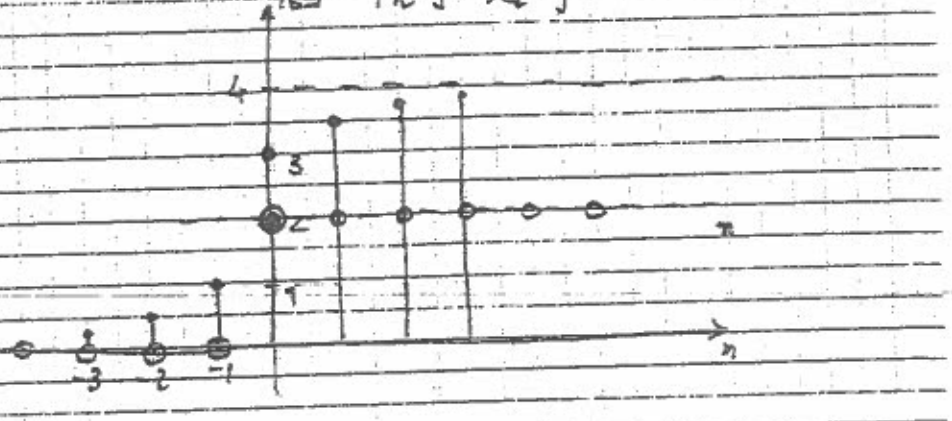
$$y[n] = \left(x_1[n] + x_2[n]\right) \circledast h[n] =$$

$$= y_1[n] + y_2[n]$$

ONDE QUE $y_1[n] = x_1[n] \circledast h[n]$ E

$y_2[n] = x_2[n] \circledast h[n]$

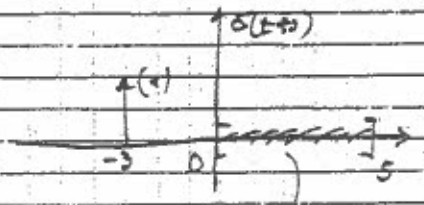
OS DOIS SUB-CASOS JÁ FORAM RESOLVIDOS E RENDEM COMO É OBVIO $y[n] = y_1[n] + y_2[n]$



XVIII) b)

$$\int_0^5 \cos(2\pi t)\,\delta(t+3)\,dt = \cos(-6\pi)\int_0^5 \delta(t+3)\,dt =$$

$$= +1 \times 0 = 0$$



INTERVALO DE INTEGRAÇÃO

c) $$\int_{-5}^{5} (4-t)\cos 2\pi t\,dt = \int_{-5}^{5} 4\cos 2\pi t\,dt - \int_{-5}^{5} t\cos(2\pi t)\,dt$$

ÍMPAR

Limites simétricos

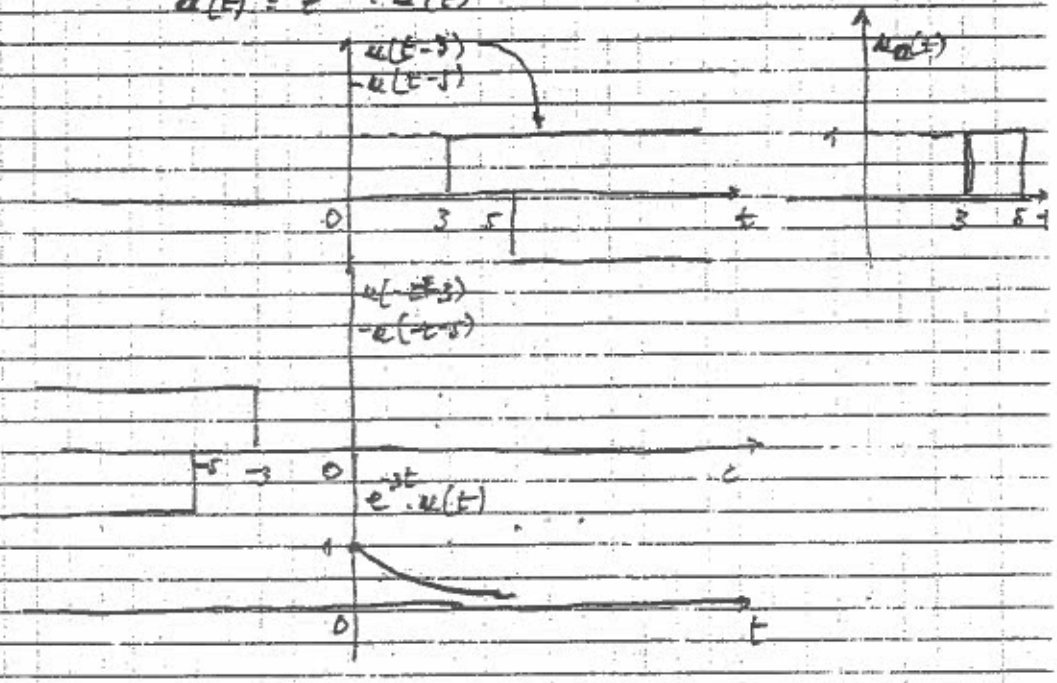
$$= \frac{1}{2\pi}\left[\sin(2\pi t)\right]_{-5}^{5} = 0$$

$$\int_{-a}^{a} = 0$$

XVII)

$$x(t) = u(t-3) - u(t-5)$$

$$h(t) = e^{-3t}\cdot u(t)$$



PARA $t < 3$ NÃO HÁ SOBREPOSIÇÃO DOS SINAIS

LOGO $y(t) = 0 \quad t \leq 3$

SINAIS E SISTEMAS

4ª FOLHA

RESOLUÇÕES

1) TRANSLACÇÃO NO TEMPO (DISCRETO OU CONTÍNUO)

NO CASO DISCRETO TEMOS:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\delta(n-n_0)| = 1$$

↓ A RESPOSTA IMPULSIONAL DESTE SISTEMA É $\delta(n-n_0)$

↓ SÓ TEM VALOR 1 PARA $n = n_0$

DE MODO ANÁLOGO PARA O CASO CONTÍNUO:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\,dt = 1$$

CONCLUÍMOS DAQUI QUE AMBOS ESTES SISTEMAS SÃO ESTÁVEIS ($|h[n]|$ E $|h(t)|$ TEM SOMA OU INTEGRAL FINITO).

JÁ O ACUMULADOR NÃO É ESTÁVEL; DE FACTO:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} u[n] = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty \quad \text{(CASO DISCRETO)}$$

↓ DEGRAU DE HEAVISIDE

↓ SÓ TEM TERMOS POSITIVOS E IGUAIS A 1

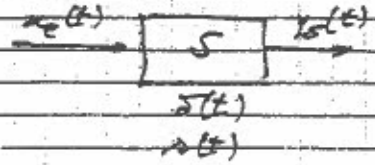
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \qquad \text{INTEGRADOR}$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = u(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(\tau)|\,d\tau = \int_{0}^{\infty} 1\,d\tau = \infty$$

DADO QUE A RESPOSTA IMPULSIONAL (EM MÓDULO) NÃO É INTEGRÁVEL, O SISTEMA NÃO É ESTÁVEL.

II)



$y_s(t) = x(t) \otimes s(t)$

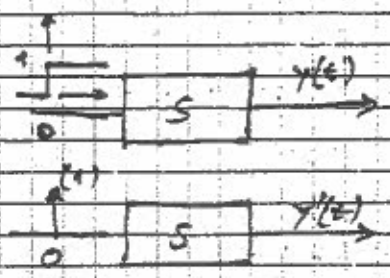
$y_i(t) = x(t) \otimes \delta(t)$

$y'_s(t) = x(t) \otimes s'(t) = x(t) \otimes \delta(t) = y_i(t)$

$x(t) \otimes \frac{ds(t)}{dt}$

PAS: $s'(t) = \delta(t)$

LOGO A DERIVADA DA SAÍDA DE UM SISTEMA A UM DEGRAU É A RESPOSTA IMPULSIONAL DO SISTEMA (MUITO IMPORTANTE)



É MAIS SIMPLES DISTO A DE UM GERADOR DE UM DEGRAU DO QUE UM GERADOR DE IMPULSOS.

III) $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$

$x(t) = k \cdot e^{2t} \cdot u(t)$ $\quad k \in \mathbb{R}$

ONDE k É UM NÚMERO REAL $\quad y(0) = 0$ (CONDIÇÃO INICIAL)

$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$

$y_p(t)$ – SOLUÇÃO PARTICULAR DA EQUAÇÃO COMPLETA (RESPOSTA FORÇADA)

$y_h(t)$ – SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO HOMOGÊNEA ASSOCIADA (RESPOSTA NATURAL)

$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$

PARA DETERMINAR A RESPOSTA FORÇADA (SOLUÇÃO PARTICULAR DA EQUAÇÃO COMPLETA) COMO O SINAL É EXPONENCIAL

EXPERIMENTA-SE UM SINAL DA MESMA FORMA QUE A ENTRADA (QUASE SEMPRE TAL É VERDADE. QUANDO É QUE TAL NÃO É VÁLIDO?)

$$x(t) = k e^{3t}$$

$$y_p(t) = \alpha e^{3t}$$

$$3\alpha e^{3t} + 2\alpha e^{3t} = k e^{3t}$$

$$3\alpha + 2\alpha = k$$

$$\alpha = \frac{k}{5}$$

$$y_p(t) = \frac{k}{5} e^{3t} \qquad t \geq 0$$

$y_h(t)$ É PROCURADA DA FORMA (SEMPRE)

$$y_h(t) = A e^{st}$$

$$A s e^{st} + 2A e^{st} = A e^{st}[s+2] = 0$$

$$s = -2 \quad \text{logo} \quad y_h(t) = e^{-2t}$$

LOGO: $y(t) = A e^{-2t} + \frac{k}{5} e^{3t}$

$y(0) = 0 \qquad 0 = A + \frac{k}{5} \qquad A = -\frac{k}{5}$

FORÇANDO, PARA $t \geq 0$

$$y(t) = \frac{k}{5}\left[e^{3t} - e^{-2t}\right] u(t)$$

IV) CONSIDERE-SE A EQUAÇÃO ÀS DIFERENÇAS FINITAS:

$$y[n] - \frac{1}{2} y[n-1] = x[n]$$

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2} y[n-1]$$

CONDIÇÃO DE REPOUSO INICIAL:

SEJA: $x[n] = k\,\delta[n]$ (IMPULSO UNITÁRIO)

$x[n] = 0 \quad n \leq -1$

$y[-1] = 0 \quad n \leq -1$

$y[-\epsilon] = 0$

$n \geq 0 \qquad y[0] = x[0] + \frac{1}{2} y[-1] =$

$= k + 0 = k$

$$y[1] = x[1] + \frac{1}{2}y[0] = 0 + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}k$$

$$y[2] = x[2] + \frac{1}{2}y[1] = 0 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}k = \frac{1}{4}k$$

$$\vdots$$

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = 0 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}k = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}k$$

FAZENDO $k=1$ TEMOS A RESPOSTA IMPULSIONAL DO SISTEMA.

FINALMENTE:

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot u[n]$$

V)

a) $\frac{d}{dt}[y(t)] + 4y(t) = x(t)$

$$y_h(t) = k e^{-4t}$$

$$x(t) = e^{(-1+3i)t}u(t)$$

$$y_p(t) = \alpha \cdot e^{(-1+3i)t}\cdot u(t)$$

$$\alpha(-1+3i)e^{(-1+3i)t} + \alpha 4 e^{(-1+3i)t} = e^{(-1+3i)t}$$

$$\alpha(3+3i) = 1$$

$$\alpha = \frac{1}{3+3i} = \frac{3-3i}{18} = \frac{1-i}{6}$$

DAÍ RESULTA:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = ke^{-4t} + \frac{1-i}{6}e^{(-1+3i)t}$$

FAZENDO $y^{(0)} = 0$ RESULTA FINALMENTE

$$y(t) = \frac{1-i}{6}\left[e^{(-1+3i)t} - e^{-4t}\right]u(t)$$

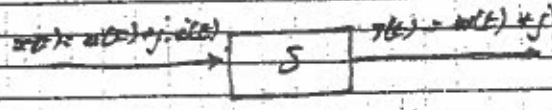
b) COMO A EQUAÇÃO DIFERENCIAL PODE SER PARTIDA NUMA SÓ COM AS PARTES REAIS E OUTRA COM AS PARTES IMAGINÁRIAS QUER DA ENTRADA QUER DA

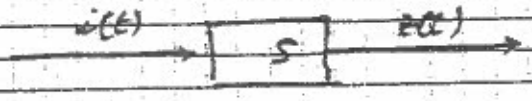
SAÍDA, PARA OBTER A SOLUÇÃO PRETENDIDA BASTA EXTRAIR A PARTE REAL DA SOLUÇÃO ATRÁS ENCONTRADA DADO QUE O SINAL $x_1(t)$ É A PARTE REAL DO INICIALMENTE CONSIDERADO.

$$x_1[t] = e^{-t}\cdot\cos(3t)\cdot u(t) = \mathrm{Re}\{x(t)\} =$$
$$= \mathrm{Re}\{e^{(-1+3j)t}\cdot u(t)\} =$$
$$= \mathrm{Re}\{e^{-t}[\cos(3t)+j\,\mathrm{sen}(3t)]\,u(t)\} =$$
$$= e^{-t}\cdot\cos(3t)\cdot u(t) \qquad \text{(p. e.)}$$

LOGO:

$$y_1(t) = \mathrm{Re}\{y(t)\} = \frac{1}{6}e^{-t}\left[\left[\cos(3t)+\mathrm{sen}(3t)-e^{-4t}\right)\cdot u\right.$$



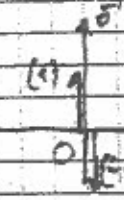


b) SABEMOS QUE:

$$x(t) = x(t) \circledast \delta(t)$$

DERIVANDO ESTA EXPRESSÃO EM ORDEM AO TEMPO:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x'(t) = x(t) \circledast \frac{d}{dt}(\delta(t)) =$$



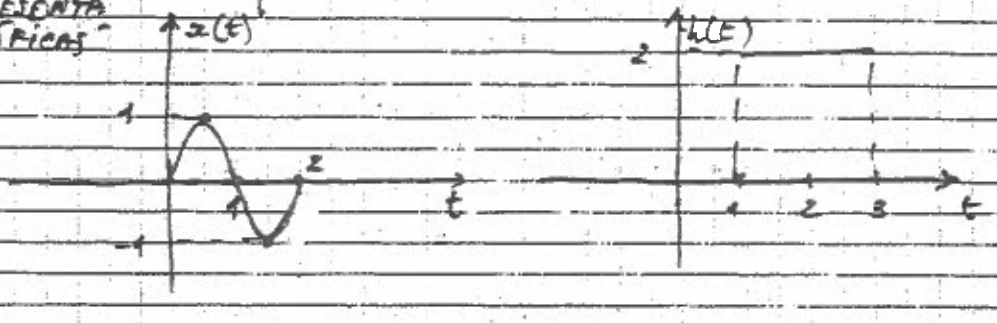
$$= x(t) \circledast \delta'(t)$$

E DE MODO ANÁLOGO PARA $\delta[n]$

b) $x(t) = \text{rect}(\pi t) \qquad t \in [0,2]$

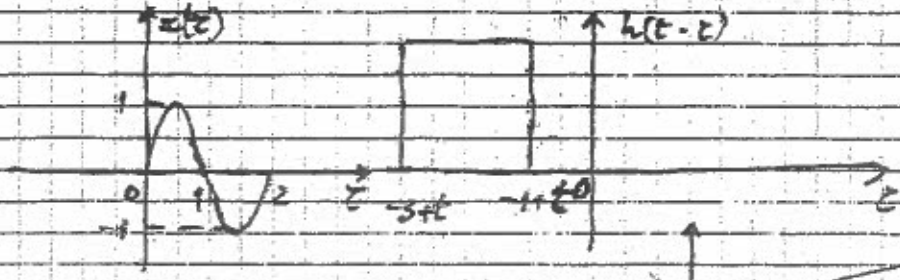
$$h(t) = \begin{cases} 2 & 1 < t \leq 3 \\ 0 & \text{NOS OUTROS PONTOS.} \end{cases}$$

AS REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS SÃO

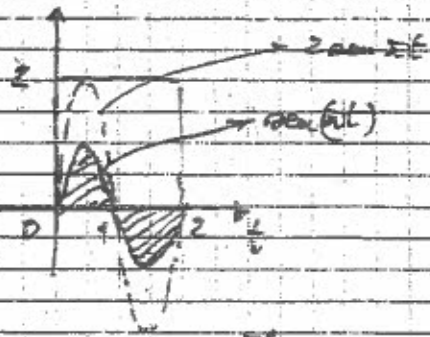


A FUNÇÃO CONVOLUÇÃO VAI SER DEFINIDA DE 1 A 5 (4 UNIDADES DE LARGURA). SEJA $y(t)$ A FUNÇÃO DE CONVOLUÇÃO:

PARA $t < 1$ E PARA $t \geq 5$ $y(t) = 0$ (NÃO HÁ SOBREPOSIÇÃO DAS FUNÇÕES ENVOLVIDAS ($x(\tau)$ e $h(t-\tau)$)



A "DIVISÃO" PODEMOS FAZER:



$t = 3$

$$y(3) = 0 = y(4) = y(5)$$

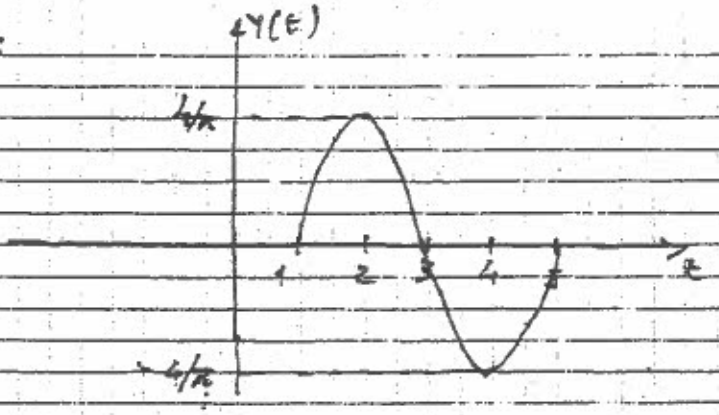
PARA $t = 2$ TEMOS:

$$y(2) = 2 \cdot \int_0^1 \text{sen}(\pi\tau)\, d\tau = \frac{2}{\pi}\left[-\cos(\pi\tau)\right]_0^1 = \frac{4}{\pi} \quad \text{(MÁXIMO)}$$

PARA $t = 4$ TEMOS

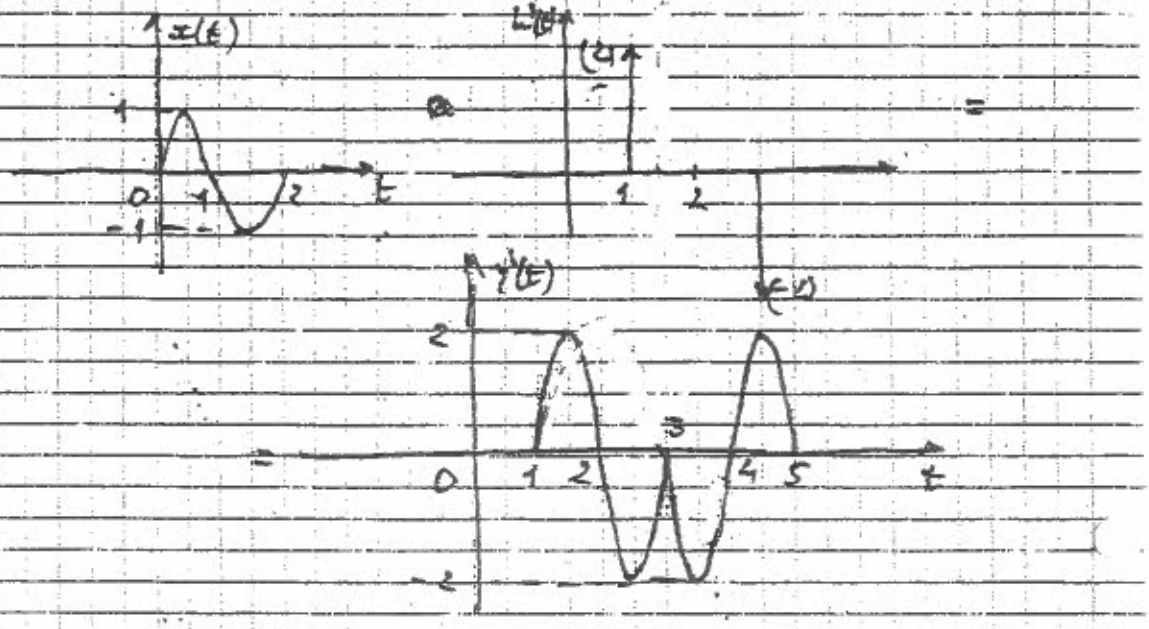
$$y(4) = -\frac{4}{\pi} \qquad \text{(MÍNIMO)}$$

RESULTA:



VEJAMOS OUTRO MODO (MUITO INTERESSANTE, PENSO EU) DE RESOLVER O MESMO PROBLEMA

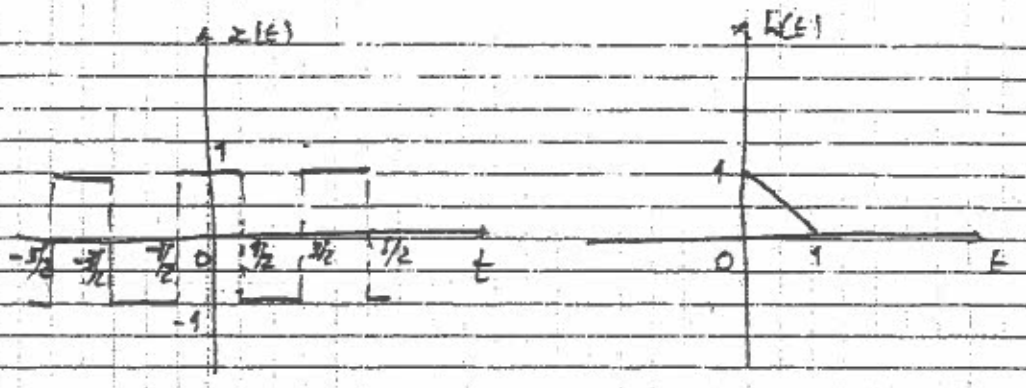
TEMOS $y'(t) = x(t) \otimes h'(t)$



$$y(t) = \int_{y'(t)} y'(t)\,dt$$

A PARTIR DAQUI AS CONTAS SÃO ELEMENTARES. RESULTA UMA ONDA COM "PERÍODO" DUPLO DO METADE DE FREQUÊNCIA (FALTAR TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NECESSÁRIAS).

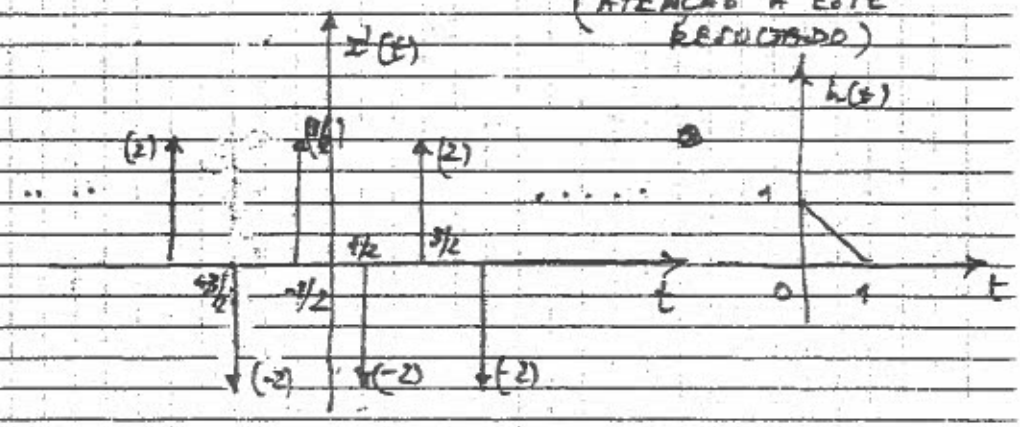
a)

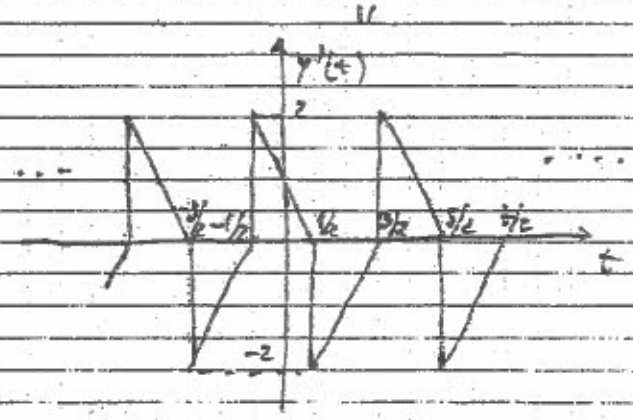


$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$y'(t) = x'(t) * h(t) = x(t) * h'(t)$$

(ATENÇÃO A ESTE RESULTADO)





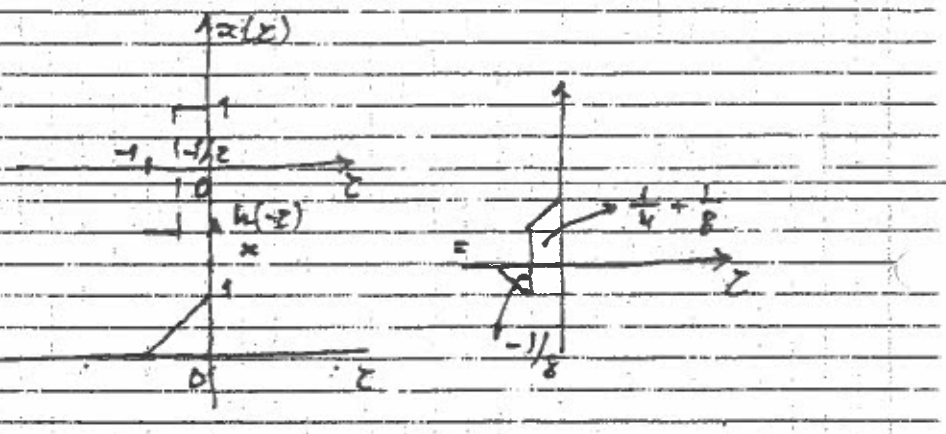
NO INTERVALO $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ TEMOS $y'(t) = -2t + 1$

LOGO $y(t) = \int (-2t + 1)\,dt = -t^2 + t + k$

PARA DETERMINAR k BASTA CALCULAR, POR EXEMPLO, $y(0)$. PARA TAL PODEMOS FAZER:

$$y(0) = \int_{-1}^{0} x(\tau)\, h(0-\tau)\, d\tau$$

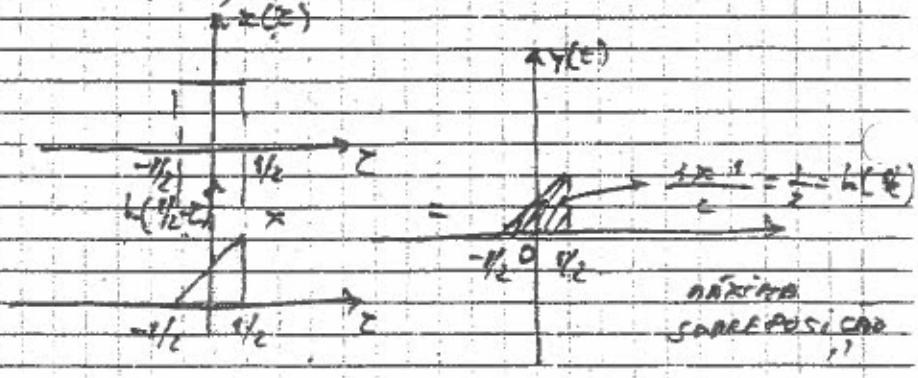
TAL PODE SER FEITO DE MODO SIMPLES GRAFICAMENTE



LOGO $\quad y(0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

DAQUI RESULTA $\quad \frac{1}{4} = -0^2 + 0 + k \qquad k = \frac{1}{4}$

PARA CALCULAR $y(1/2)$ PROCEDEREMOS DE MODO ANÁLOGO



TEMOS $\quad y'(t) = 2t - 3 \qquad t \in]1/2, 3/2[$

LOGO

$$y(t) = t^2 - 3t + k_1$$

DOS: $\quad y(1/2) = \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + k_1 \qquad k_1 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

(10)

Logo: $y(t) = \begin{cases} -t^2 + t + 1/4 & t \in [-1/2, 1/2] \\ t^2 - 3t + 7/4 & t \in [1/2, 3/2] \end{cases}$

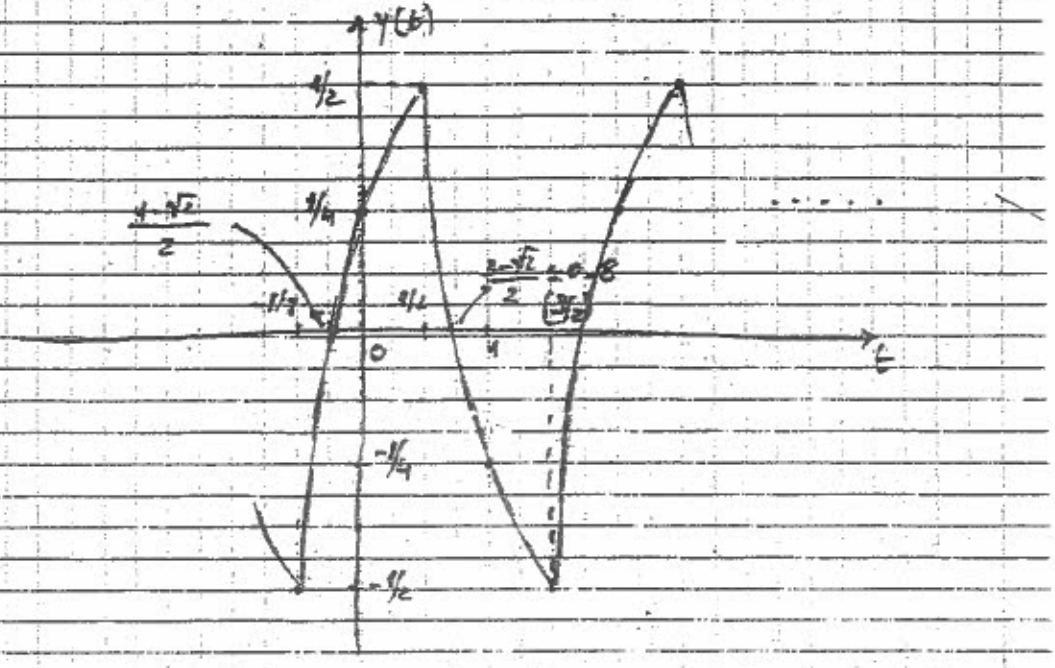
PERIÓDICA DE PERÍODO 2

(NOTE-SE QUE A FUNÇÃO É CONTÍNUA MAS A SUA DERIVADA CONTÉM DESCONTINUIDADES FINITAS PARA $t = \frac{1}{2} + n$, $n \in \mathbb{Z}$)

$$y(1/2) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\times\frac{3}{2} + \frac{7}{4} = \frac{9}{4} - \frac{18}{4} + \frac{7}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

(verifica-se).

GRAFICAMENTE RESULTA



ZEROS: $t^2 - 3t + 7/4 = 0$ $\quad t = \frac{3 \pm \sqrt{9-7}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2} =$

$= \frac{3-\sqrt{2}}{2} \simeq 0,6$ (A QUE SERVE)

$-t^2 + t + \frac{1}{4} = 0$

$t^2 - t - \frac{1}{4} = 0$

$t = \frac{1 \pm \sqrt{1+1}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \simeq -0,2$ (0,2)

PRELIMINARES:

IE) CONSIDERE-SE O OPERADOR DE DIFERENCIAÇÃO EQUIVALENTE AO MÉTODO DOS ANULADORES (RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE ORDEM n COM 2º MEMBRO)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \beta\right) \qquad (2^{a} \text{ ORDEM})$$

ESTE OPERADOR É COMUTATIVO E SO FAZ SENTIDO QUANDO APLICADO A UMA FUNÇÃO DE t $y(t)$ E SENDO IGUALADO A ZERO OU A UMA FUNÇÃO $x(t)$.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \beta\right) y(t) = x(t)$$

ELE VALE

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\alpha+\beta)\frac{\partial}{\partial t} + \alpha\beta$$

RESULTANDO QUANDO APLICADO A y E IGUALADO A x

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a\frac{\partial y}{\partial t} + by = x$$

COM $a = -(\alpha+\beta)$ E $b = \alpha.\beta$

α E β SÃO OBVIAMENTE AS RAÍZES DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA ASSOCIADA À EQUAÇÃO DIFERENCIAL:

$$z^2 + az + b = 0$$

A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL HOMOGÊNEA CORRESPONDENTE É:

$$y(t) = C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t}$$

ONDE C_1 E C_2 SÃO CONSTANTES DE INTEGRAÇÃO DETERMINADAS A PARTIR DE CONDIÇÕES INICIAIS $y(0)$ E $y'(0)$ (POR EXEMPLO).