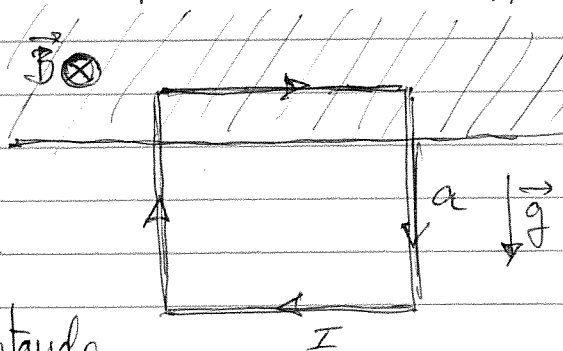


Força magnética e trabalho da força magnética

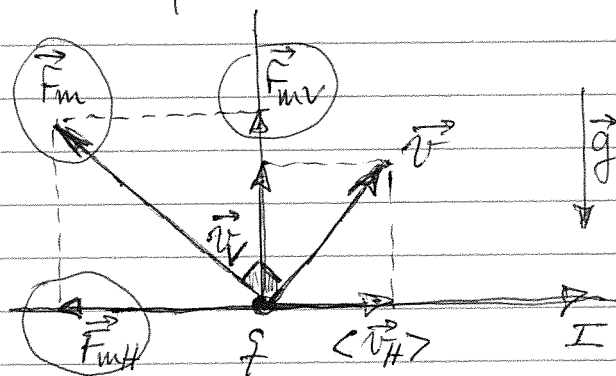
8.25a

Considere-se uma espira quadrada (lado a , massa m) em que circula uma corrente elétrica de intensidade I , com um dos lados horizontais situado num campo magnético $\vec{B}$ uniforme e normal à espira, como mostra a figura. A espira é sustentada, em equilíbrio estático num plano vertical, por uma força magnética $|\vec{F}_m| = F_m = I Ba$ que equilibra o seu peso $|\vec{F}_g| = F_g = mg$, quando $I = (mg)/(Ba)$. Se a intensidade da corrente aumentar, a espira desloca-se para cima de uma distância h , aumentando



a sua energia potencial gravítica; o trabalho realizado é $W = mgh = I Ba h$. Contudo, a força magnética $\vec{F}_m$ nunca realiza trabalho, pois é sempre normal à velocidade $\langle \vec{v} \rangle$ dos portadores de carga num elemento $d\vec{l}$ de corrente. Ora esta velocidade apresenta componente horizontal $\langle \vec{v}_H \rangle$ e componente vertical $\vec{v}_V$ quando a espira se move para cima (correspondentes à velocidade de deriva dos portadores e à velocidade de subida da espira, respetivamente).

A força magnética $\vec{F}_m$, normal a $\vec{v}$ apresenta duas componentes:



$F_{mv} = I Ba$, que realiza trabalho no deslocamento vertical

$F_{mH} = [\text{Constante}] \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$, que se

opõe ao movimento dos portadores, ou seja, à circularização da corrente I

Para manter a intensidade da corrente I constante, o gerador que fornece corrente à espira fornece uma potência $F_{mH} ds = F_{mH} (\langle \vec{v}_H \rangle dt)$ e realiza um trabalho no deslocamento h de ϕ ou

$$W_G = [\text{Constante}] a B \int_0^{T(h)} v_V \langle v_H \rangle dt = I a B h$$

(pois $I = [\text{Constante}] \times \langle v_H \rangle$)

Assim, é o gerador a fornecer uma energia correspondente ao aumento de energia potencial gravítica. A força magnética "reorienta" a força horizontal sobre os portadores (devida ao campo elétrico imposto pelo gerador), criando a condição necessária ao fornecimento de energia pelo gerador e sua conversão em energia potencial gravítica.

sendo esta a posição de equilíbrio estável sendo $\phi=0$, e de equilíbrio instável sendo $\phi=\pi$, como é fácil verificar.

Em conclusão, verifica-se que a força resultante sobre a espira é nula, e o momento de força é dado por $\vec{\tau} = I \vec{S} \times \vec{B}$, em que $\vec{S} = ab \hat{n}$.

Uma aplicação importante da ação do campo magnético sobre a espira de corrente é realizada no galvanômetro de quadro móvel.

— Campo magnético uniforme e espira circular de corrente

Seja uma espira circular de raio a , centrada na origem e no plano Oxy , em que circula a corrente I no sentido indicado na figura. Assume-se um campo magnético $\vec{B}$, com componentes normal e paralela ao plano da espira:

$$\vec{B} = \vec{B}_n + \vec{B}_{||}$$

Sem perda de generalidade, pode considerar-se $\vec{B}_{||} = B_{||} \hat{z}$.

A componente B_n corresponde, num elemento de corrente $I d\vec{l}$, uma força radial $d\vec{F}_n$ no plano da espira. Supondo uma espira rígida, nada daí resulta, sendo a força total $\vec{F}_n = 0$.

A componente $B_{||}$ provoca uma força $d\vec{F}_{||}$ no elemento de corrente $I d\vec{l}$ dirigida segundo zz ; considerando elementos de corrente diametralmente opostos, resulta para este par um binário de forças. Consequentemente, a força total $\vec{F}_{||}$ é nula. O momento total de força calcula-se por

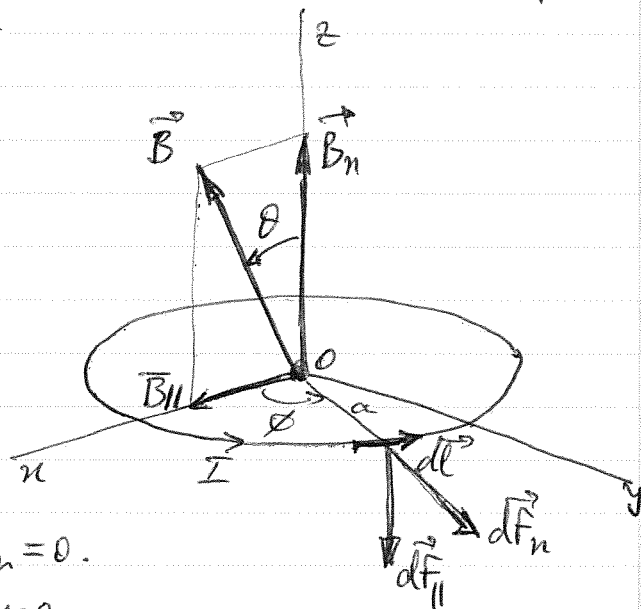
$$\vec{\tau} = \oint_C \vec{r} \times d\vec{F}, \text{ com } d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

sendo:

$$\begin{cases} \vec{r} = a(\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}) \\ d\vec{l} = a d\phi (-\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}) \\ \vec{B} = B(\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{z}) \end{cases}$$

Resulta:

$$\vec{\tau} = I \int_0^{2\pi} \left[a(\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}) \right] \times \left[a d\phi (-\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}) \right] \times \left[B(\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{z}) \right] =$$



$$\begin{aligned}
&= I \int_0^{2\pi} d\phi \left[a(\cos\phi \hat{x} + \sin\phi \hat{y}) \right] \times \left[aB(\sin\phi \cos\theta \hat{y} + \cos\phi \sin\theta (-\hat{z}) + \cos\phi \cos\theta \hat{z}) \right] = \\
&= I a^2 B \int_0^{2\pi} d\phi \left[\sin\phi \cos\phi \hat{z} + \cos^2\phi \sin\theta \hat{y} + \sin\phi \cos\phi \sin\theta (-\hat{x}) + \right. \\
&\quad \left. + \sin\phi \cos\phi \cos\theta (-\hat{z}) \right] = \\
&= I a^2 B \left[\sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \cos^2\phi \hat{y} \right] = \\
&= \pi a^2 I B \sin\theta \cdot \hat{y}
\end{aligned}$$

Este resultado pode escrever-se como $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$, sendo $\vec{m} = (0, 0, \pi a^2 I)$ e $\vec{B} = (B \sin\theta, 0, B \cos\theta)$.

A espira tenderá a rodar em torno do eixo yy , sendo a posição de equilíbrio estável a correspondente a $\hat{n}$ ser paralelo e no sentido de $\vec{B}$.

Motor homopolar

O motor homopolar é constituído por um disco circular condutor de raio a e espessura t que roda à velocidade angular ω , sustentado num eixo de raio b , num campo magnético axial uniforme $\vec{B}$. Existem terminais eléctricos de contacto móvel no eixo e em todo o perímetro do disco (na figura está representado apenas um contacto no disco).

Supõe-se o campo eléctrico no disco condutor apenas com componente radial $\vec{E}$.

Um portador de carga q está sujeito a forças radiais magnéticas ($q\omega \vec{r} \times \vec{B}$) e eléctricas ($q\vec{E}$). Sendo μ a mobilidade dos portadores no meio condutor, a velocidade radial $\vec{v}_p$ desses portadores vale

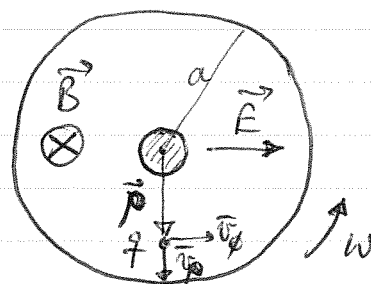
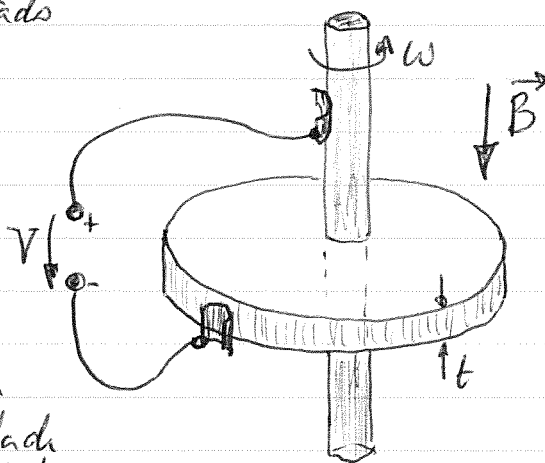
$$\vec{v}_p = \mu (\vec{E} - \omega \vec{r} \times \vec{B})$$

verificando-se que $\vec{v}_p \ll \vec{v}_\phi$.

A velocidade $\vec{v}_p$ corresponde uma força magnética azimutal

$$\vec{F}_\phi = q \vec{v}_p \times \vec{B} = q [\mu (\vec{E} - \omega \vec{r} \times \vec{B})] \times \vec{B}$$

O diagrama seguinte ilustra a situação:



A densidade volumétrica de força azimutal $f_\phi(\rho)$ vale, então:

$$f_\phi(\rho) = N \vec{f} = N q \mu [E - \omega \rho B] B = \\ = q (E - \omega \rho B) B$$

em que N é a densidade de portadores

e q a condutividade do material do disco. Temos

$f_\phi(\rho) = |\vec{J}(\rho) \times \vec{B}|$, em que $J(\rho) = q(E - \omega \rho B)$ é a densidade de corrente. O momento de força total sobre o disco é dado por

$$\vec{\tau} = \int_V \vec{r} \times \vec{f}_\phi dV$$

$$\text{Assim: } \tau = \int_b^a \rho \left[2\pi \rho d\rho \cdot t \cdot [q(E - \omega \rho B)] \right] = 2\pi t q B \int_b^a \rho^2 (E - \omega \rho B) d\rho$$

A corrente elétrica radial total vale

$$I = 2\pi \rho t \cdot J(\rho) = 2\pi \rho t q (E - \omega \rho B)$$

donde:

$$E - \omega \rho B = \frac{I}{2\pi \rho t q}$$

$$\text{Assim: } \tau = I B \int_b^a \rho d\rho = \frac{1}{2} I B (a^2 - b^2)$$

Note-se que a componente azimutal de força realiza trabalho na rotação do disco. O campo elétrico varia radialmente: $E(\rho) = (\omega B) \rho + \left(\frac{I}{2\pi t q} \right) \frac{1}{\rho}$

A densidade volumétrica de carga elétrica é uniforme:

$$\sigma_v = \epsilon \nabla \cdot \vec{E} = \epsilon \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho E) = 2\epsilon \omega B$$

A tensão elétrica V aplicada ao motor é dada por

$$V = \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_b^a \left(\omega B \rho + \frac{I}{2\pi t q} \frac{1}{\rho} \right) d\rho =$$

$$= \frac{1}{2} \omega B (a^2 - b^2) + \frac{I}{2\pi t q} \ln \frac{a}{b} = \frac{\omega \tau}{I} + I R$$

em que R é a resistência radial do disco entre os raios a e b (ver seguir...). Esta relação exprime a conservação de energia:

$$\left(\begin{array}{l} \text{Potência fornecida pela} \\ \text{fonte} = VI \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{Potência mecânica} \\ = W\mathcal{L} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Potência dissipada por} \\ \text{efeito de Joule} = RI^2 \end{array} \right)$$

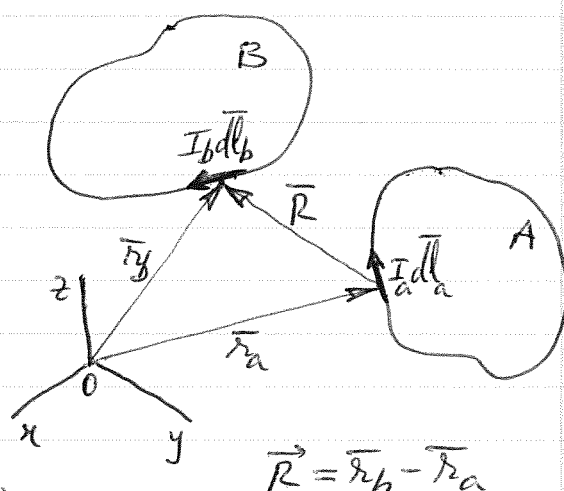
A potência mecânica $W\mathcal{L} = VI - RI^2$ é máxima para $\frac{d}{dI}(VI - RI^2) = 0$, ou seja, para $I = \frac{V}{2R}$.

Nesta situação, a eficiência é de 50% ($VI = 2RI^2$; $W\mathcal{L} = RI^2$) e a velocidade de rotação vale $\omega_{\text{max}} = \frac{V}{B(a^2 - b^2)}$.

8.11. Forças entre correntes eléctricas

Considere-se dois circuitos filiformes (A, B) em que circulam correntes (I_a, I_b). A corrente I_a cria um campo magnético (calculável pela lei de Biot e Savart), geralmente não-uniforme, que origina força e momento de força sobre o circuito B, em que circula a corrente I_b . A força de A sobre B será, assim (recorrendo à lei de Laplace):

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ab} &= I_b \oint_B d\vec{l}_b \times \left[\frac{\mu_0 I_a}{4\pi} \oint_A \frac{d\vec{l}_a \times \hat{R}}{R^2} \right] = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_a I_b \oint_A \oint_B \frac{d\vec{l}_b \times (d\vec{l}_a \times \hat{R})}{R^2} \end{aligned}$$



verificando-se a identidade $d\vec{l}_b \times (d\vec{l}_a \times \hat{R}) = d\vec{l}_a (d\vec{l}_b \cdot \hat{R}) - \hat{R} (d\vec{l}_a \cdot d\vec{l}_b)$

mas:

$$\oint_A \oint_B \frac{d\vec{l}_a (d\vec{l}_b \cdot \hat{R})}{R^2} = \oint_A d\vec{l}_a \oint_B \frac{d\vec{l}_b \cdot \hat{R}}{R^2} = 0$$

pois se trata do integral de dR/R^2 com limites de integração coincidentes (dado o circuito B ser fechado).

Resulta, então:

$$\boxed{\vec{F}_{ab} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_a I_b \oint_A \oint_B \frac{\hat{R} (d\vec{l}_a \cdot d\vec{l}_b)}{R^2}}$$

($\vec{R} = \vec{r}_b - \vec{r}_a$)

Note-se que a força de B sobre A é $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$, e que as forças são proporcionais às intensidades de corrente.

Pode considerar-se a expressão da força entre correntes elétricas estacionárias circulando em percursos filiformes, no vácuo, como análoga a uma expressão da força eletrostática de Coulomb entre duas distribuições estacionárias de carga no vácuo; tal é evidenciado mais claramente escrevendo $\vec{F}_{AB}$ na forma

$$\vec{F}_{AB} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_A \oint_B \frac{(\vec{I}_A d\vec{l}_A) \cdot (\vec{I}_B d\vec{l}_B)}{R^2} \hat{R}$$

Contudo, há diferenças importantes nessa analogia:

- a força magnética depende da orientação relativa ($d\vec{l}_A \cdot d\vec{l}_B$).
- o sinal negativo indica força atractiva entre correntes com "orientação semelhantes" (ex: correntes com o mesmo sentido em bobinas de Helmholtz), enquanto a força eletrostática de Coulomb entre cargas do mesmo sinal é repulsiva.
- a expressão da força magnética estacionária é integral, enquanto a força de Coulomb entre cargas pontuais tem uma expressão algébrica simples.

Deve ainda notar-se que, ao contrário do que a expressão de $\vec{F}_{AB}$ poderia sugerir, a força magnética elementar entre os elementos diferenciais de corrente $\vec{I}_A d\vec{l}_A$ e $\vec{I}_B d\vec{l}_B$ não está dirigida segundo $\hat{R}$ (mas sim segundo $d\vec{l}_B \times (d\vec{l}_A \times \hat{R})$).

Para correntes de condução e num referencial estacionário, as densidades de carga eléctrica nos circuitos são nulas ($\sigma_A = \sigma_B = 0$), não existindo força eléctrica entre eles. Contudo, para correntes de convecção, além da força magnética considerada existirá ainda força eléctrica entre os circuitos.

A expressão da força magnética estacionária $\vec{F}_{AB}$ (que pode ser determinada experimentalmente para um sistema de correntes específico, em particular num sistema com elevada simetria de construção, como espiras circulares coaxiais)

pode ser manipulada para se obter a lei de Biot e Savart, seguindo um caminho lógico inverso ao adotado nas análises anteriores. Sendo:

$$\oint_B \nabla\left(\frac{1}{R}\right) \cdot d\vec{l}_b = 0$$

resulta: $\oint_A d\vec{l}_a \oint_B \nabla\left(\frac{1}{R}\right) \cdot d\vec{l}_b = - \oint_A d\vec{l}_a \oint_B \left(\frac{\hat{R}}{R^2}\right) \cdot d\vec{l}_b = 0$

Multiplicando esta expressão por $-(\mu_0/4\pi)I_a I_b$ e adicionando à expressão de $\vec{F}_{ab}$, vem:

$$\vec{F}_{ab} + 0 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_a I_b \oint_A \oint_B \frac{d\vec{l}_a (d\vec{l}_b \cdot \hat{R}) - \hat{R} (d\vec{l}_a \cdot d\vec{l}_b)}{R^2}$$

Usando a identidade

$$d\vec{l}_b \times (d\vec{l}_a \times \hat{R}) = d\vec{l}_a (d\vec{l}_b \cdot \hat{R}) - \hat{R} (d\vec{l}_b \cdot d\vec{l}_a)$$

vem:

$$\vec{F}_{ab} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_a I_b \oint_A \oint_B \frac{d\vec{l}_b \times (d\vec{l}_a \times \hat{R})}{R^2} =$$

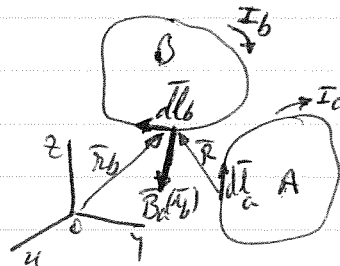
$$= \oint_B I_b d\vec{l}_b \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} I_a \oint_A \frac{d\vec{l}_a \times \hat{R}}{R^2} \right] =$$

$$= \oint_B I_b d\vec{l}_b \times \vec{B}_a(\vec{r}_b) \quad , \quad \text{com} \quad \vec{B}_a(\vec{r}_b) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_a \oint_A \frac{d\vec{l}_a \times \hat{R}}{R^2}$$

Em geral, os campos magnéticos criados por correntes circulando em circuitos filiformes não são uniformes. Assim, o momento das forças magnéticas de A sobre B relativamente à origem dos eixos (O) será calculado pela expressão geral:

$$\vec{\tau}_{ab} = I_b \oint_B \vec{r}_b \times (d\vec{l}_b \times \vec{B}_a(\vec{r}_b))$$

com: $\left[\vec{B}_a(\vec{r}_b) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_a \oint_A \frac{d\vec{l}_a \times \hat{R}}{R^2} \right]$, sendo $\vec{R} = \vec{r}_b - \vec{r}_a$.



Para circuitos muito afastados (relativamente à sua extensão) poderá ser razoável considerar os campos magnéticos devidos às respectivas correntes como quase-uniformes na localização dos circuitos. Nessa aproximação, as forças magnéticas serão nulas ($\vec{F}_{ab} = -\vec{F}_{ba} = 0$), mas o momento das forças valerá aproximadamente $\vec{\tau}_{ab} = \vec{m}_b \times \vec{B}_a$, sendo o campo $\vec{B}_a$

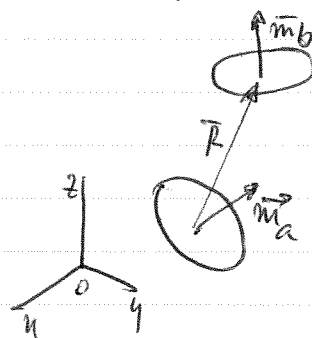
possivelmente aproximado pelo campo do dipolo magnético $\vec{m}_a$ no "centro" do dipolo magnético $\vec{m}_b$.

Assim, sejam dois dipolos magnéticos $\vec{m}_a$ e $\vec{m}_b$. O campo magnético de $\vec{m}_a$ origina um momento de força $\vec{\tau}_{ab}$ sobre $\vec{m}_b$ dado por

$$\vec{\tau}_{ab} = \vec{m}_b \times \vec{B}_a$$

com

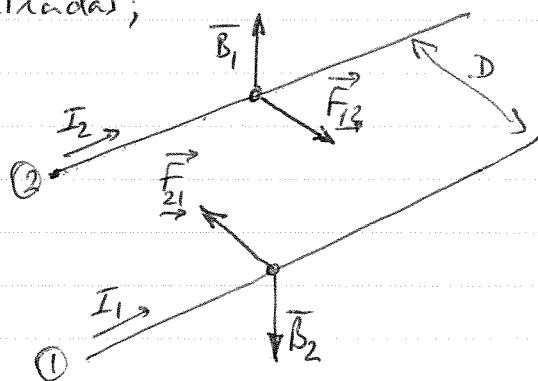
$$\vec{B}_a = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{R^3} [3(\vec{m}_a \cdot \vec{R})\vec{R} - R^2 \vec{m}_a]$$



Para dipolos alinhados no mesmo eixo ($\vec{m}_a \parallel \vec{m}_b \parallel \vec{R}$), $\vec{\tau}_{ab} = 0$.

Importa analisar o caso ideal de duas correntes, retilíneas paralelas. Os campos magnéticos das correntes, têm linhas de força circulares, nelas centradas; para os sentidos das correntes representados, os campos magnéticos têm a orientação indicada na figura e a grandeza

$$B_{1,2} = \frac{\mu_0 I_{1,2}}{2\pi D}$$



no outro condutor. As forças de Laplace, por unidade de comprimento, têm então a grandeza

$$\left[\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi D} \right]$$

sendo atractivas para correntes com o mesmo sentido, e repulsivas no caso contrário. Tal permite a definição formal da unidade de intensidade de corrente eléctrica no SI (ampère, A) como a corrente eléctrica $I=I_1=I_2$ que, circulando simultaneamente em dois condutores rectilíneos infinitos, afastados de $D=1\text{m}$, resulta em forças por unidade de comprimento dos condutores de $2 \times 10^{-7} \text{ N m}^{-1}$. Obviamente, a implementação prática do ampère tem, contudo, que recorrer a outro esquema (forças entre bobinas circulares, medidas experimentalmente e calculáveis teoricamente).

— Força entre uma corrente retilínea e uma corrente cilíndrica superficial paralela

8.32a

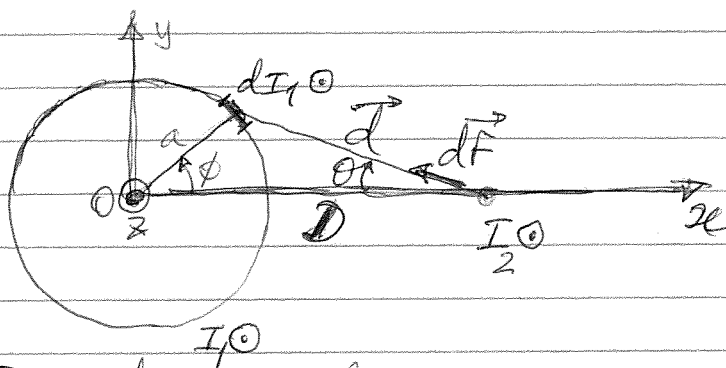
Considere-se uma corrente retilínea I_2 segundo $\hat{z}$ a distância D do eixo z de uma superfície cilíndrica de raio a , em que circula uma corrente I_1 segundo $\hat{z}$, como mostra a figura.

A densidade superficial de corrente na superfície cilíndrica é $J_{s1}\hat{z}$, sendo

$$J_{s1} \cdot 2\pi a = I_1$$

Entre ϕ e $\phi + d\phi$, circula uma corrente elementar dI_1 segundo $\hat{z}$, em que

$$dI_1 = J_{s1} \cdot a d\phi = \frac{I_1}{2\pi a} \cdot a d\phi = \frac{I_1}{2\pi} d\phi$$



Esta corrente elementar filiforme exerce uma força sobre a corrente I_2 : $d\vec{F} = -\frac{\mu_0 I_2 dI_1}{2\pi d} \hat{r}$ ($\hat{r}$ é o vetor de posição de I_2 relativamente a dI_1)

Considerando correntes elementares em posições simétricas $\pm\phi$, resulta imediatamente que só importa calcular a componente $\hat{x}$ da força:

$$dF_x = -\frac{\mu_0 I_2 I_1 d\phi}{4\pi^2 d} \cos\theta$$

Como: $a^2 = d^2 + D^2 - 2dD \cos\theta$, donde: $\cos\theta = \frac{d^2 + D^2 - a^2}{2dD}$

Como: $d^2 = a^2 + D^2 - 2aD \cos\phi$, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\cos\theta}{d} &= \frac{D^2 + d^2 - a^2}{2dDd^2} = \frac{D^2 + a^2 + D^2 - 2aD \cos\phi}{2D(a^2 + D^2 - 2aD \cos\phi)} = \\ &= \frac{D - a \cos\phi}{a^2 + D^2 - 2aD \cos\phi} \end{aligned}$$

Assim, integrando sobre a superfície cilíndrica:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\hat{x} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{D - a \cos\phi}{a^2 + D^2 - 2aD \cos\phi} d\phi = \\ &= -\hat{x} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi^2} \int_0^\pi \frac{D - a \cos\phi}{a^2 + D^2 - 2aD \cos\phi} d\phi \end{aligned}$$

Recorrendo a tabelas de integrais, encontra-se o seguinte:

$$= -\hat{x} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi^2} \left[\left(\frac{-a}{-2aD} \phi \right)^\pi + \frac{D(-2aD) - (a^2 + D^2)(-a)}{-2aD} \int_0^\pi \frac{d\phi}{(a^2 + D^2) + (-2aD) \cos\phi} \right]$$

$$= -\hat{x} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi^2} \left\{ \frac{\pi}{2D} + \left[\frac{1}{D} \tan^{-1} \left(\frac{D+a}{D-a} \right) \tan \frac{\phi}{2} \right] \right\} \pi \Big|_0^\pi = \quad 8.326$$

$$= -\hat{x} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi^2} \left\{ \frac{\pi}{2D} + \frac{1}{D} \tan^{-1} \left[\left(\frac{D+a}{D-a} \right) \tan \frac{\pi}{2} \right] - \frac{1}{D} \tan^{-1} \left[\left(\frac{D+a}{D-a} \right) \tan 0 \right] \right\}$$

Então:

$$= \underline{D > a} : (D+a)/(D-a) > 0. \text{ Daí:}$$

$$= -\hat{x} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi^2 D} \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 0 \right\} = -\hat{x} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi D}$$

$$= \underline{D < a} : (D+a)/(D-a) < 0. \text{ Daí:}$$

$$= -\hat{x} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi^2 D} \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 0 \right\} = 0$$

Assim, se a corrente retilínea se situar no interior da superfície cilíndrica, não está sujeita a força. Se a corrente retilínea se situar no exterior da superfície cilíndrica, a força coincide com a força de uma corrente filiforme I_1 no eixo da superfície cilíndrica. Se as correntes circularem em sentidos opostos, a força será repulsiva neste segundo caso de corrente I_2 no exterior.

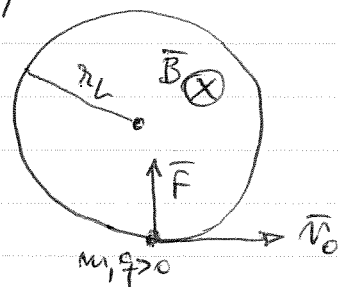
8.12. Dinâmica de partículas carregadas em campos eléctricos e magnéticos estáticos

Conforme discutido na secção ..., uma partícula carregada (q) movendo-se com velocidade $\vec{v}$ num dado referencial, na presença de campos eléctrico e magnético, é actuada por uma força $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Campos eléctricos e magnéticos podem, assim, ser usados para obter trajetórias específicas de partículas carregadas, o que conduz a aplicações importantes. Analisa-se algumas situações relativamente simples, supondo em todos os casos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ uniformes e estáticos.

— Partícula (m, q) injectada com velocidade $\vec{v}_0$ num campo $\vec{B}$
A força sobre a partícula no ponto de injectão é

$$\vec{F}_m = q \vec{v}_0 \times \vec{B}$$

Seja, em primeiro lugar, o caso de $\vec{v}_0$ normal a $\vec{B}$; a situação é a representada na figura, para $q > 0$ e $\vec{B}$ com o sentido indicado. É imediato constatar que a força magnética



$\vec{F}_m$ é sempre normal a $\vec{v}$, não sendo realizado trabalho. O movimento é circular uniforme, e a trajetória tem um raio

$$r_L = \frac{mv}{qB} \quad (r_L: \text{raio de Larmor, ou giro magnetico})$$

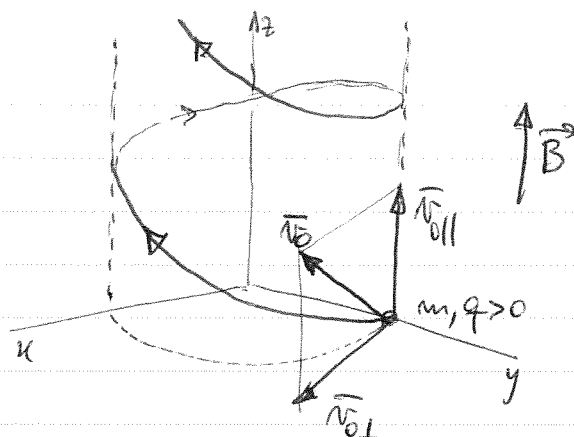
sendo a frequência do movimento circular

$$\omega_c = \frac{qB}{m} \quad (\omega_c: \text{frequência ciclotrónica})$$

Seja agora uma situação mais geral, com $\vec{v}_0$ arbitrário. A velocidade $\vec{v}$ em qualquer ponto da trajetória tem componentes paralela e normal a $\vec{B}$: $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$. A força magnética escreve-se, então

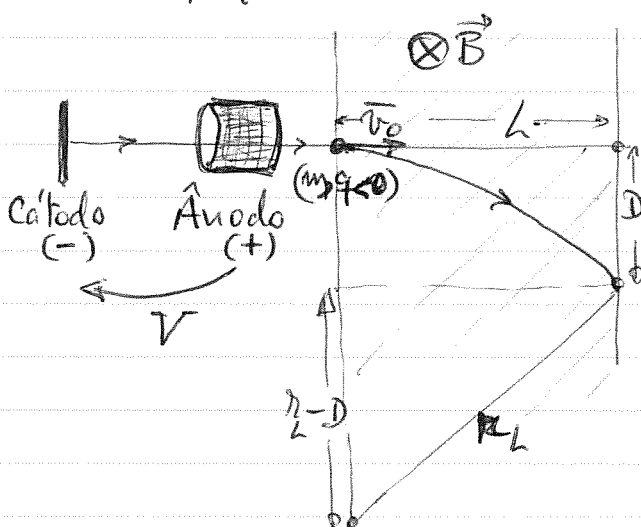
$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B} = q \vec{v}_{\parallel} \times \vec{B} + q \vec{v}_{\perp} \times \vec{B} = q \vec{v}_{\perp} \times \vec{B}$$

O movimento da partícula é, assim, resultante de um movimento rectilíneo uniforme, com velocidade $\vec{v}_{\parallel}$, composto com um movimento circular uniforme, como descrito anteriormente ($r_L; \omega_c$). Resulta um movimento helicoidal para a partícula.



— Determinação da razão q/m de uma partícula carregada

A razão q/m do electrão foi determinada por Thomson, numa experiência cujo esquema simplificado se indica na figura. Num tubo em vácuo, os electrões (carga $-e$) são emitidos por efeito termoiónico de um cátodo, e acelerados por uma diferença de potencial V entre este cátodo e um ânodo cilíndrico oco.



Admitendo que os electrões são emitidos do cátodo com velocidade inicial desprezável, a sua energia cinética à saída do ânodo será

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = eV, \text{ donde } v_0 = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

(considera-se a massa m constante, independente da velocidade, o que é apropriado neste caso).

Supondo que um campo magnético $\vec{B}$ uniforme existe no espaço após o ânodo, ocorre deflexão magnética, sendo a trajetória circular com raio r_L (curvando para baixo, como na figura, sendo $q < 0$ e $\vec{B}$ no sentido indicado):

$$r_L = \frac{mv_0}{eB} = \sqrt{\frac{2mV}{eB^2}}$$

Da geometria da figura vem que

$$r_L^2 = (r_L - D)^2 + L^2, \text{ ou } r_L = \frac{D^2 + L^2}{2D}.$$

Assim:

$$\boxed{\frac{e}{m} = \frac{8V}{B^2} \cdot \frac{D^2}{(D^2 + L^2)^2}}$$

o que mostra que q/m pode ser determinado a partir de medidas experimentais. Este método, como é óbvio, pode

se utilizado para a determinação da razão q/m de outras partículas carregadas, usando injectores apropriados.

← Filtros de velocidade, de momento linear e de massa

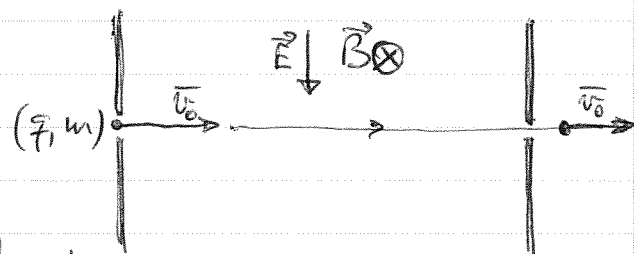
Considere-se uma região do espaço em que coexistem um campo electrostático $\vec{E}$ e um campo magnetostático $\vec{B}$, mutuamente ortogonais, e

perpendiculares à velocidade inicial $\vec{v}_0$ com que são injectadas partículas carregadas nessa região, conforme se indica na figura. A força sobre a partícula é'

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

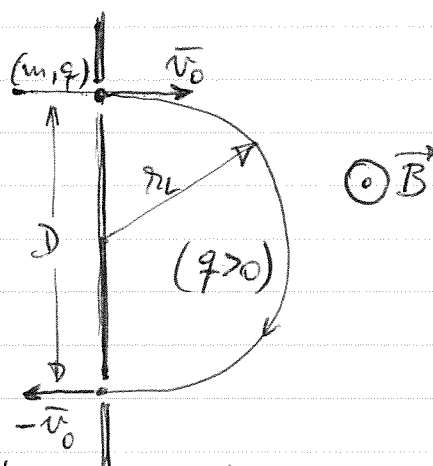
que se anula sendo

$$v_0 = \frac{E}{B}$$



Neste caso, a trajectória será rectilínea, a velocidade manter-se-á no valor v_0 , e as partículas emergem da abertura de saída. Para outros valores de v_0 , ocorre deflexão, impedindo a saída das partículas. Este esquema constitui, portanto, um filtro de velocidade.

Se a partícula carregada (m, q) for injectada com velocidade $\vec{v}_0$, através de um orifício, numa região em que existe um campo $\vec{B}$ uniforme e normal a $\vec{v}_0$, conforme mostra a figura, para $q > 0$ resulta a trajectória circular representada com raio $r_L = \frac{mv_0}{qB}$.



A partícula emerge com velocidade $-\vec{v}_0$ de um outro orifício, à distância D do primeiro, se $D = 2r_L$; essa partícula terá, então, um momento linear

$$\left[mv_0 = qB \frac{D}{2} \right]$$

sendo q constante, este esquema permite filtrar, por ajuste de B , partículas com o valor desejado de momento linear.

Estes filtros de velocidade e de momento linear podem

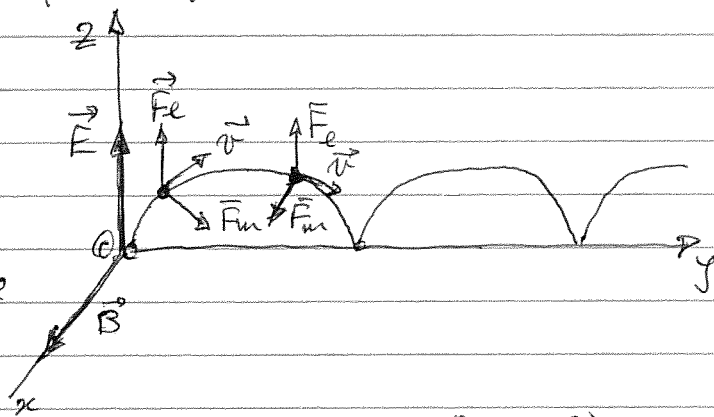
Movimento cicloidal

8.35a

Uma partícula carregada (m, q) é libertada da origem, em $t=0$, com velocidade nula, e move-se numa região onde existem campos elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$ uniformes, sendo:

$$\vec{E} = E \hat{z} ; \vec{B} = B \hat{x}.$$

O campo elétrico acelera a partícula, que adquire velocidade, de onde resulta força magnética que aumenta com a velocidade; tal produz um retorno em direção ao eixo y , contrariando o efeito da força elétrica. O movimento da partícula realiza-se no plano Oyz , como é óbvio.



Forças: $\vec{F}_e = q \vec{E} = (0, 0, qE)$

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B} = q(0, \dot{y}, \dot{z}) \times (B, 0, 0) = (0, B\dot{z}, -B\dot{y}).$$

Da lei de Newton, resulta: $m\ddot{y} = qB\dot{z}$

ou: $\int \ddot{y} = \frac{qB}{m} \dot{z} = \omega \dot{z}$ $m\ddot{z} = qE - qB\dot{y}$

$$\ddot{z} = \frac{qB}{m} \frac{E}{B} - \frac{qB}{m} \dot{y} = \omega \left(\frac{E}{B} - \dot{y} \right) ; \text{ sendo } \omega = qB/m \text{ a frequência ciclotrônica.}$$

Resultam um sistema de equações acopladas; derivando a primeira equação e substituindo na segunda:

$$\ddot{y} = \omega \ddot{z} = \omega^2 \left(\frac{E}{B} - \dot{y} \right)$$

Donde:

$$(\ddot{y}) + \omega^2 (\dot{y}) = \omega^2 E/B, \text{ cuja solução se escreve } \dot{y} = C_1 \cos(\omega t + \phi_0) + E/B$$

Integrando: $\left[y(t) = \frac{C_1}{\omega} \sin(\omega t + \phi_0) + \frac{E}{B} t + C_2 \right]$

Como $\ddot{y} = -\omega C_1 \sin(\omega t + \phi_0)$, vem: $\ddot{z} = \dot{y}/\omega = -C_1 \sin(\omega t + \phi_0)$.

Integrando: $\left[z(t) = \frac{C_1}{\omega} \cos(\omega t + \phi_0) + C_3 \right]$

As condições iniciais são: $y(0) = z(0) = 0$; $\dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$. Donde:

$$\begin{cases} 0 = (C_1/\omega) \sin \phi_0 + C_2 \\ 0 = (C_1/\omega) \cos \phi_0 + C_3 \end{cases} ; \begin{cases} 0 = C_1 \omega \phi_0 + E/B \\ 0 = -C_1 \sin \phi_0 \end{cases}$$

Resulta diretamente:

$$\phi_0 = 0 ; C_2 = 0 ; C_1 = -E/B ; C_3 = -C_1/\omega = +E/\omega B$$

Donde: $y(t) = -\frac{E}{\omega B} \sin(\omega t) + \frac{E}{B} t = \frac{E}{\omega B} [\omega t - \sin(\omega t)]$

$$z(t) = -\frac{E}{\omega B} \cos(\omega t) + \frac{E}{\omega B} = \frac{E}{\omega B} [1 - \cos(\omega t)]$$

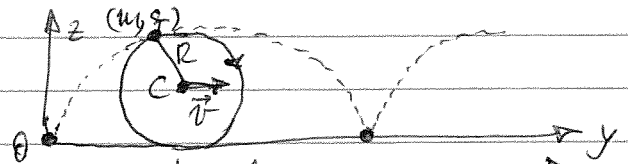
P. 356

Fazendo $R \equiv E/(\omega B)$ e atendendo à identidade $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$, resulta:

$$(y - R\omega t)^2 + (z - R)^2 = R^2$$

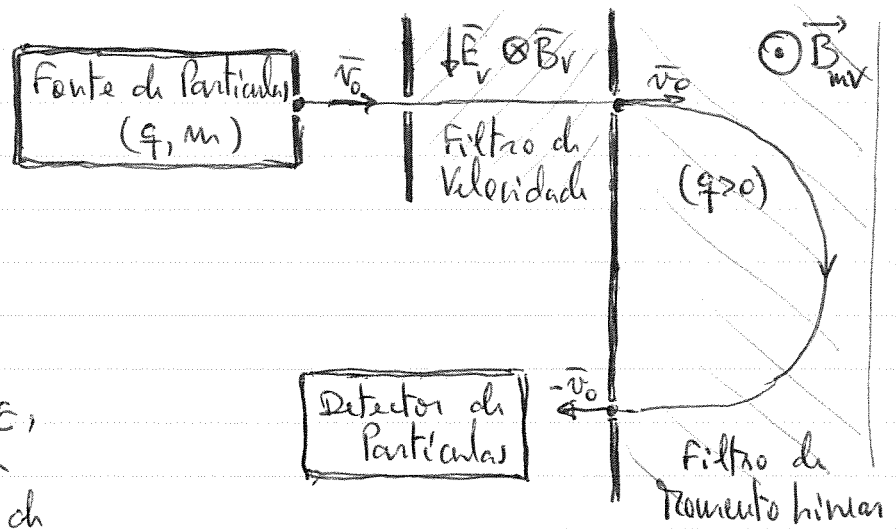
Trata-se da equação de uma circunferência de raio R com centro móvel no ponto $C(0, R\omega t, R)$; a velocidade do centro é $v = \omega R = E/B$, segundo o eixo y .

A trajetória da partícula é uma curva cicloide, produzida por um ponto de uma circunferência de raio R que rola ao longo do eixo y , com velocidade $\vec{v}$ do seu centro. O período é $\Delta y = 2\pi R = \frac{2\pi}{\omega} \frac{E}{B} = 2\pi \frac{m}{q} \frac{E}{B^2}$.



Na experiência de Thomson de determinação de e/m , a determinação da velocidade das partículas é essencial, e é feita com um filtro E, B .

seu combinados para se realizar um filtro de massa de partículas carregadas, na configuração da figura. Tal constitui um espectrômetro de massa, muito utilizada na identificação de íons de isótopos atômicos.



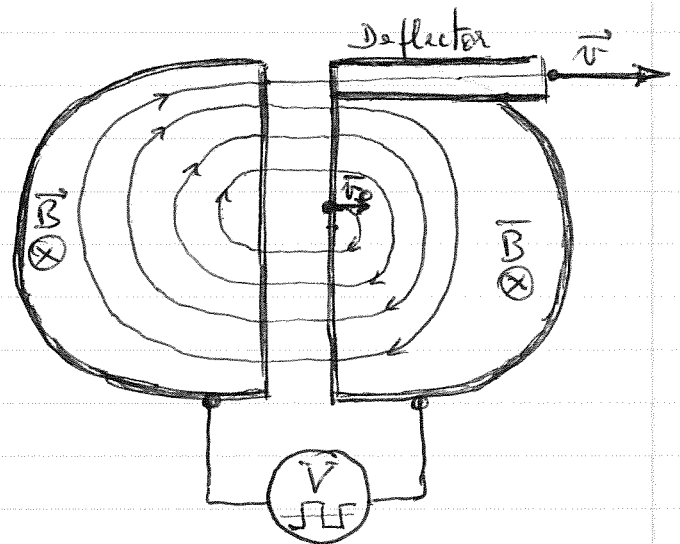
— O ciclotrão

O esquema básico do ciclotrão (Lawrence, 1932), utilizada para a aceleração de partículas carregadas, está representado na figura. Numera região em vácuo, um injector introduz as partículas com velocidade inicial $\vec{v}_0$; o campo magnético $\vec{B}$, normal a $\vec{v}_0$ e com o sentido adequado, origina uma trajetória semi-circular no interior de um eletrodo semi-cilíndrico D_1 . Entre os dois eletrodos próximos é aplicada uma tensão elétrica V de alta frequência, cujo sinal muda em cada "semi-período" da trajetória da partícula; assim, em cada passagem da partícula carregada entre os "Ds", há um aumento da energia cinética $\Delta E_c = qV$ ($V \sim 10^5$ volt).

O raio das trajetórias ($r_L = mv/qB$) aumenta sucessivamente; não introduzindo a correção relativista da massa, e sendo $r_L = R$ o raio correspondente à extração da partícula acelerada pelo deflector, resulta uma energia cinética máxima

$$E_{cmax} = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = \frac{(qBR)^2}{2m}$$

Para $B=1T$, $R=1m$ e para prótons ($q=+e$), resulta $E_{cmax} \sim 50MeV$ ($1eV = 1.6 \times 10^{-19} J$).



Para energias elevadas ($\sim \text{GeV}$), é necessário atender à correção relativista da massa. Assim:

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \text{com } \vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} \text{ e } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

A frequência ciclotrônica ω_c escreve-se

$$\omega_c = \frac{q}{m} B = \frac{q}{\gamma m_0} B$$

e diminui quando v aumenta, supondo B constante. É necessário, portanto, variar a frequência com que a tensão de aceleração $V(t)$ muda de sinal, de modo a ajustá-la à frequência ciclotrônica variável e ser possível atingir-se energias elevadas das partículas aceleradas.

— Efeito de Hall

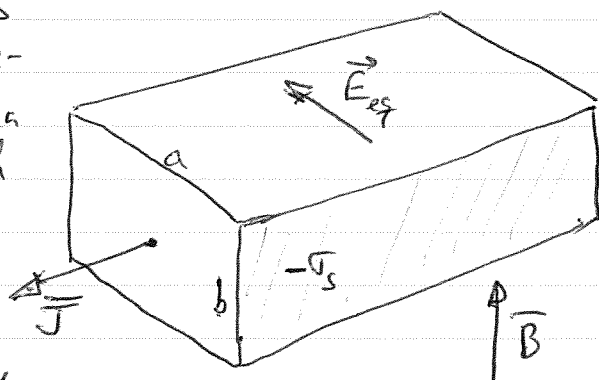
Considere-se uma barra de um material condutor metálico, de seção retangular ($a \times b$), onde circula uma corrente elétrica de densidade volumétrica $\vec{J} = Nq\vec{v}$ (sendo N a densidade de portadores de carga q , deslocando-se com velocidade $\vec{v}$), situada numa região de campo magnético $\vec{B}$ uniforme, normal a $\vec{J}$ como indicado na figura. A força magnética $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ sobre os portadores de carga provoca o seu deslocamento transversal, sendo equivalente à produzida por um campo elétrico $\vec{E}_{ef} = \vec{v} \times \vec{B}$. Chamam-se distribuições superficiais de carga de densidades $\pm \sigma_s$, a que corresponde, no equilíbrio, um campo elétrico $-\vec{E}_{ef}$. A tensão de Hall, que pode ser medida entre as faces do condutor, vale

$$V_H = vBa$$

Note-se que o sinal de V_H depende do sinal da carga q dos portadores. A tensão de Hall pode escrever-se, ainda, como

$$V_H = \frac{J}{Nq} Ba = \frac{I}{Nqb} B \quad (\text{sendo } J = I/ab)$$

A densidade volumétrica de carga Nq (ou a densidade de portadores N , se a carga q for conhecida) pode ser determinada a partir das medidas de V_H , B , I e b . Usando o coeficiente



de Hall $R_H = 1/Nq$, e assim

$$R_H = \frac{V_H b}{BI}$$

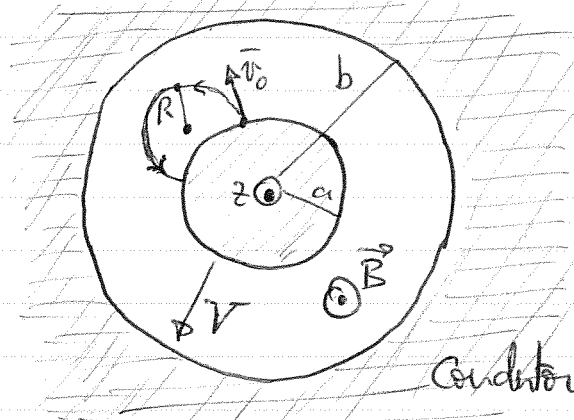
A mobilidade (μ) dos portadores resulta, então, de R_H e da condutividade eléctrica (g) do material:

$$\mu = g R_H$$

Assumir-se, simplificando, que os portadores se deslocam a uma velocidade única.

— Magnetron

A figura mostra o esquema básico do magnetron de, constituído por um cilindro condutor interior (cátodo) de raio a , e uma cavidade cilíndrica coaxial de raio b (ânodo) produzida num meio condutor. Existe uma diferença de potencial V entre as duas superfícies cilíndricas, e um campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{z}$, paralelo ao eixo das superfícies condutoras.



Supondo $B=0$ e $V>0$, e que são emitidos electrões com velocidade inicial desprezível da superfície $\rho=a$, a sua trajetória será radial até $\rho=b$, onde atingem a energia cinética

$$\frac{1}{2} m v^2 = eV$$

ou seja, desprezando a correcção relativista de massa, a velocidade

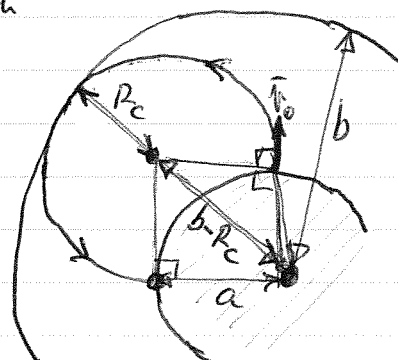
$$\vec{v}(\rho=b) = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \hat{\rho}$$

Supondo agora $B \neq 0$ e $V=0$, a trajetória de um electrão emitido radialmente de $\rho=a$ com velocidade

$\vec{v}_0 = v_0 \hat{\rho}$ é circular uniforme, com um raio da órbita R calculado por

$$eBv_0 = \frac{mv_0^2}{R}$$

O electrão atingirá o ânodo se

$$(b - R_c)^2 = R_c^2 + a^2$$


= Efeito Hall quântico

8.38a

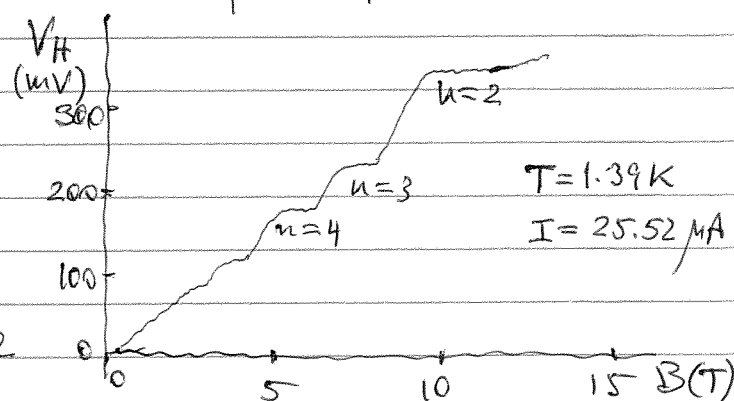
Foi descoberto em 1980, durante investigações sobre o efeito Hall em semicondutores submetidos a campos magnéticos intensos e a baixa temperatura. Em vez da resposta $V_H(B)$ linear, registam-se patamares, indicando uma quantificação da tensão de Hall.

A resistência de Hall,

$R_H = V_H / I$, assume valores quantificados:

$$R_H = \frac{R_K}{n}, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

sendo $R_K = \frac{h}{e^2} = 25812.807 \, \Omega$



a constante de von Klitzing. Como R_K é determinado com exatidão da ordem de 10^9 , o efeito Hall quantificado é usado para definir a unidade de resistência elétrica (Ω , ohm). Em situações especiais, o inteiro n acima indicado é substituído por um número racional f : efeito Hall quântico fracionário.

em que R_c é o raio crítico da trajetória; resolvendo a equação, tem-se $R_c = \frac{b^2 - a^2}{2b}$

Supondo v_0 constante, quando o campo magnético é igual ou inferior ao campo magnético crítico

$$B_c = \left(\frac{2b}{b^2 - a^2} \right) \frac{m}{e} v_0$$

o electrão atinge o ânodo ($R > R_c$).

Seu $B, V > 0$ simultaneamente, existe força eléctrica radial $-e\vec{E}$ e força magnética $-e\vec{v} \times \vec{B}$ com componentes radial e azimutal. Relativamente ao eixo zz , o momento da força M é:

$$M = \rho \vec{r} \times \vec{F} = eBv_\phi \cdot \rho = eB\rho \frac{d\rho}{dt}$$

Assim, sendo L o momento angular do electrão relativamente a zz , tem-se:

$$M = \frac{dL}{dt} = eB\rho \frac{d\rho}{dt}$$

Integrando $\frac{d}{dt} \left[L - \frac{eB\rho^2}{2} \right] = 0$, resulta $L - \frac{eB}{2}\rho^2 = C$,

em que C é constante.

Supondo agora que os electrões são emitidos de $\rho = a$ com velocidade inicial não-nula $\vec{v} = (v_\rho, v_\phi, v_z)$ e que $B, V > 0$, não havendo força segundo zz , a velocidade $v_z \hat{z}$ é constante. Sendo $v_\rho(a)$ e $v_\phi(a)$ as componentes da velocidade inicial na situação em que o electrão tem energia cinética inicial limiar para atingir o ânodo, atendendo à conservação de energia resulta que

$$\frac{1}{2} m (v_z^2 + v_\rho^2(a) + v_\phi^2(a)) + eV = \frac{1}{2} m (v_z^2 + v_\phi^2(b))$$

(na situação limiar, $v_\rho(b) = 0$). Donde:

$$v_\phi(b) = \left[v_\rho^2(a) + v_\phi^2(a) + \frac{2eV}{m} \right]^{1/2}$$

Atendendo também à relação estabelecida para o momento angular relativamente a zz , aplicada em $\rho = a$ e $\rho = b$:

$$m v_\phi(a) a - \frac{eB a^2}{2} = m v_\phi(b) b - \frac{eB b^2}{2}$$

Assim, o campo magnético crítico vale agora

$$B_c = \frac{2m(\psi(b)b - \psi(a)a)}{e(b^2 - a^2)} =$$
$$= \frac{2mb}{e(b^2 - a^2)} \left[\sqrt{\psi(a)^2 + \psi(a)^2 + \frac{2eV}{m}} - \frac{\psi(a)a}{b} \right]$$