

8

Campo Magnético Estacionário no Vácuo. Lei de Biot e Savart

8.1. Introdução

8.2. Efeitos magnéticos

8.3. Força magnética e campo magnetostático no vácuo

8.4. Lei de Biot e Savart

8.5. Bobinas de Helmholtz

8.6. Solenoide : campo magnético no eixo

8.7. Campo magnético de uma espira circular de corrente :
aproximação dipolar

8.8. Força magnética e momento de força magnética

8.9. Momentos magnéticos de distribuições de cargas móveis

8.10. Exemplos de cálculo de força e momento de força magnética

8.11. Forças entre correntes elétricas

8.12. Dinâmica de partículas carregadas em campos elétricos
e magnéticos estáticos

8

Campo Magnético Estacionário no Vácuo. Lei de Biot e Savart.

8.1. Introdução

8.2. Efeitos magnéticos

As interações entre corpos magnetizados são bem conhecidas desde a Antiguidade. Um pedaço de magnetite (Fe_3O_4), mineral cuja denominação evidencia uma ligação à região de Magnésia, na Ásia Menor, onde é encontrado, exerce sobre outros pedaços de magnetite ou de ferro forças magnéticas (assim designadas historicamente). Essas forças foram assumidas, até tempos relativamente recentes, como de carácter e origem diferente das forças eléctricas, bem como das forças gravíticas. Todavia, com a disponibilidade de geradores de corrente eléctrica, foi verificada a interacção entre ímãs permanentes e correntes eléctricas, assim como a interacção entre correntes eléctricas circulando em condutores separados. Assim, a ligação entre fenómenos eléctricos (associados a cargas eléctricas) e fenómenos magnéticos (associados a movimento de cargas eléctricas — correntes eléctricas) foi sendo estabelecida. Todavia, só no século XX foi efectivamente desenvolvida a teoria microscópica que permite compreender o comportamento dos ímãs permanentes e materiais magnéticos em geral.

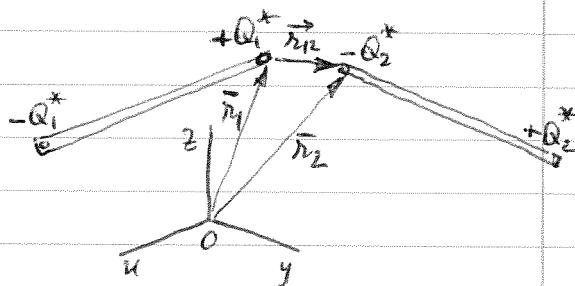
Nos ímãs, foram claramente identificados dois pólos distintos (normalmente denominados norte e sul, por associação à orientação das agulhas magnéticas com o campo magnético terrestre). Uma analogia entre as forças magnéticas e as forças eléctricas, respectivamente entre "cargas magnéticas" pontuais Q^* (monopólos magnéticos) e cargas eléctricas pontuais pares, à

primeira vista, muito apropriada. Todavia, não foi observado, até à data, qualquer monopolo magnético isolado. Na realidade, num íman permanente cilíndrico, por exemplo, ocorrem simultaneamente "monopolos magnéticos" com "cargas magnéticas" $\pm Q^*$, ou seja, o ímã é um "dipolo magnético". A tentativa de isolar um monopolo seccionando o ímã resulta na criação de dois novos "dipolos magnéticos".



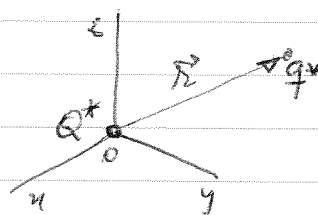
Todavia, é possível estudar experimentalmente, em boa aproximação, as acções entre "monopolos magnéticos", recorrendo a ímanes permanentes cilíndricos muito longos, e desprezando as acções entre "polos" remotos em favor das forças entre "polos" próximos. Isso resulta numa lei de força magnetostática no vácuo, análoga à lei de Coulomb da Electrostatica, e que se pode escrever

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_1^* Q_2^*}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$



sendo Q_1^* as "cargas magnéticas" e μ_0 uma constante com dimensões que se designa por permeabilidade magnética do vácuo. Tal como na Electrostatica, define-se, assim, o campo magnético $\vec{B}$ criado por um "monopolo" Q^* no vácuo como

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q^*}{r^2} \hat{r}$$



sendo a força magnética sobre outro "monopolo" q^* situado no campo magnético $\vec{B}$ dada por $q^* \vec{B}$.

O facto experimental de correntes eléctricas (ou seja, cargas eléctricas em movimento) produzirem acções magnéticas superindica, claramente, que o magnetismo está relacionado com interacções entre cargas eléctricas móveis. Diversos físicos contribuíram para o desenvolvimento inicial dessa relação:

Oersted, Gauss, Henry, Faraday. Todavia, a identificação da origem do magnetismo dos materiais só muito recentemente ficou esclarecida, com o desenvolvimento da Física Atómica e da Física Quântica. Sabe-se hoje que o campo de um

magnete permanente, por exemplo, resulta de efeitos à escala atómica, relacionados com cargas eléctricas dos átomos. Uma síntese do magnetismo dos materiais é apresentada no capítulo seguinte.

Assim, a compreensão da origem dos fenómenos magnéticos conduziu a uma associação dos campos anteriormente distintos da Electricidade e do Magnetismo, numa visão integrada que se designa modernamente por Electromagnetismo, tal como solidamente estabelecido por Maxwell com as suas famosas equações. A teoria da Relatividade veio, ainda, esclarecer a ligação profunda entre os campos eléctrico e magnético, em resultado dos trabalhos de Einstein, conduzindo a uma visão unificadora da Electrodinâmica Clássica.

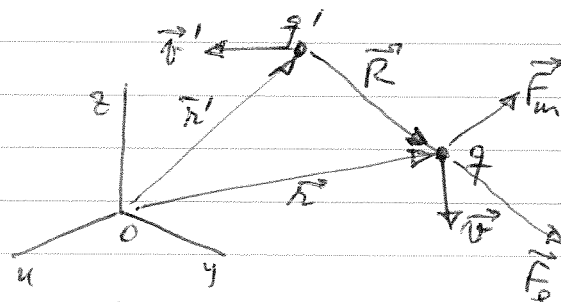
8.3. Força magnética e campo magnetostático no vácuo

Embora o percurso histórico seguido na formulação das leis da Magnetostática se tenha baseado nas observações experimentais das acções entre "polos magnéticos" e correntes eléctricas em condutores, é conceptualmente mais simples discutir a força magnética e o campo magnético numa interacção entre cargas pontuais móveis.

Considere-se, assim, duas cargas eléctricas pontuais q, q' no vácuo, situadas em $\vec{r}, \vec{r}'$ e movendo-se com velocidades $\vec{v}, \vec{v}'$, respectivamente, no referencial Oxyz considerado. A força que actua sobre a carga q tem duas componentes (força eléctrica $\vec{F}_e$, força magnética $\vec{F}_m$) e escreve-se como

$$\boxed{\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})}$$

(força de Lorentz)



Esta expressão permite definir, através da medição da força que actua sobre a carga pontual q móvel ("carga de teste"), os campos eléctrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$ em cada ponto e para cada velocidade de q , campos esses devidos à carga q' na respectiva posição e com a velocidade $\vec{v}'$. Para velocidades $|\vec{v}|, |\vec{v}'| \ll c$ (c : velocidade electo-

magnética no vácuo; $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$):

$$\left[\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{R^2} \hat{R} : \text{campo eléctrico de } q' \text{ em } \vec{r}. \\ \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q'}{R^2} \vec{v}' \times \hat{R} : \text{campo magnético de } q', \vec{v}' \text{ em } \vec{R} \end{aligned} \right]$$

Estes campos, assim especificados para velocidades não-relativistas, produzem o valor correcto da força total sobre a carga q . Note-se que, no capítulo 1, se considerou q' como uma carga estática no referencial, dando neste caso $\vec{v}' = 0$ e $\vec{B} = 0$. O valor do campo magnético $\vec{B}$ depende claramente do referencial adoptado, através de $\vec{v}$ e $\vec{v}'$; tal aponta, como atrás referido, para uma interpretação do Electromagnetismo em que intervêm a Relatividade. Note-se que, como evidência a expressão da força de Lorentz, $\vec{v} \times \vec{B}$ é equivalente a um campo eléctrico em termos dimensionais.

A força magnética tem uma expressão mais complicada que a da força eléctrica; apresenta uma dependência do tipo R^{-2} , mas a sua orientação não é segundo $\hat{R}$, excepto quando $\vec{v} \perp \hat{R}$. A força magnética não é uma força central, sendo um vector no plano $(\hat{R}, \vec{v}')$.

Como $\vec{v} \cdot \vec{F}_m \equiv 0$, a força magnética não realiza trabalho sobre uma carga pontual.

A constante dimensional μ_0 (permeabilidade magnética do vácuo) é definida, no SI, como

$$\left[\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1} \right] \quad (\text{ou } \text{N A}^{-2})$$

No Sistema Internacional de Unidades, a unidade de B é o tesla (T), sendo $[B] = \text{M I}^{-1} \text{T}^{-2}$

Como se concluirá no capítulo ... , a relação

$$\left[\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1 \right]$$

estabelece uma relação entre a velocidade electromagnética no vácuo (fixada, no SI, no valor $c = 2.99785 \dots \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$) e as constantes μ_0 (fixada, no SI, no valor $4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$) e ϵ_0 .

Calculando a razão entre as grandezas da força magnética e da força eléctrica, e atendendo à relação anterior entre ϵ_0 e μ_0 , resulta

$$\left[\frac{F_m}{F_e} \leq \left(\frac{v}{c} \right) \cdot \left(\frac{v'}{c} \right) \right]$$

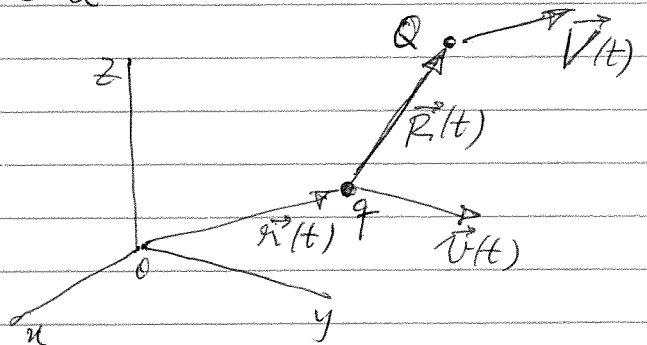
Força entre duas cargas pontuais

No caso geral de duas cargas pontuais móveis e aceleradas num referencial $Oxyz$, a expressão da força torna-se bem mais complicada.

A força de uma carga q (com posição $\vec{r}(t)$, e cuja velocidade e aceleração são, respectivamente, $\vec{v}(t)$ e $\vec{a}(t)$) sobre uma carga Q , cuja posição relativamente à carga q é $\vec{R}(t)$ e que se move com velocidade $\vec{V}(t)$, resulta dos campos elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$ criados por q e que atuam sobre Q .

Mostra-se que:

$$\vec{F}_{q \rightarrow Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{(\vec{R} \cdot \vec{u})^3} \times \left[\left[(c^2 - v^2) \vec{u} + \vec{R} \times (\vec{u} \times \vec{a}) \right] + \frac{\vec{V}}{c} \times \left[\vec{R} \times \left[(c^2 - v^2) \vec{u} + \vec{R} \times (\vec{u} \times \vec{a}) \right] \right] \right]$$



em que $\vec{u} \equiv c\hat{R} - \vec{v}$ e $\vec{a} \equiv \dot{\vec{v}}$, sendo $\vec{R}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{a}$ valores determinados no tempo retardado $[t] \equiv t - R/c$, em que c é a velocidade eletromagnética no vácuo.

A expressão de $\vec{F}_{q \rightarrow Q}$ é da forma $\vec{F}_{q \rightarrow Q} = Q[\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}]$

sendo $(\vec{E}, \vec{B})$ o campo eletromagnético devido à carga q , calculado atendendo à velocidade finita c da propagação do campo eletromagnético da carga q móvel e acelerada.

Assim, para velocidades não-relativistas, $v_m \ll c$. Tal um implica que a força magnética deva ser imediatamente desprezada. Como se verá adiante, após aplicação do princípio de superposição para calcular os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ de sistemas de cargas em movimento, no caso de correntes elétricas de condução (em que a densidade volumétrica, superficial ou linear total de carga elétrica é nula) o campo elétrico macroscópico anula-se, mas não o campo magnético. Na generalidade das situações de interesse, o campo magnético $\vec{B}$ é gerado por uma distribuição de cargas móveis e não por uma única carga pontual, ou seja, por uma corrente elétrica volumétrica caracterizada por um vector densidade de corrente $\vec{J}$, por uma corrente superficial de densidade $\vec{J}_s$, ou por uma corrente elétrica filiforme de intensidade I . O cálculo deste campo magnético resulta directamente do campo $\vec{B}_q$ de uma carga pontual, aplicando o princípio de superposição, obtendo-se a lei de Biot e Savart, discutida adiante.

De igual modo, um campo magnético $\vec{B}$ exerce, sobre uma distribuição de corrente elétrica (caracterizada por $\vec{J}$, $\vec{J}_s$ ou I , dependendo do tipo de distribuição), força magnética e momento de força magnética, calculáveis a partir das forças magnéticas sobre cargas pontuais móveis aplicando o princípio de superposição. Resulta a lei de Laplace e outras relações discutidas adiante.

Estas leis fenomenológicas estiveram, na realidade, na origem do desenvolvimento histórico dos estudos sobre Magnetismo.

8.4. Lei de Biot e Savart

O campo magnético $\vec{B}$ resulta, em geral, de distribuições finitas de corrente elétrica (definidas por $\vec{J}$ ou $\vec{J}_s$, ou no caso de condutores considerados filiformes por I). Assim, considerando o princípio de superposição, o campo magnético $\vec{B}(\vec{r})$, criado por $\vec{J}(\vec{r}')$ existente num volume V' , será obtido a partir do campo de uma carga pontual q' , atrás especificado:

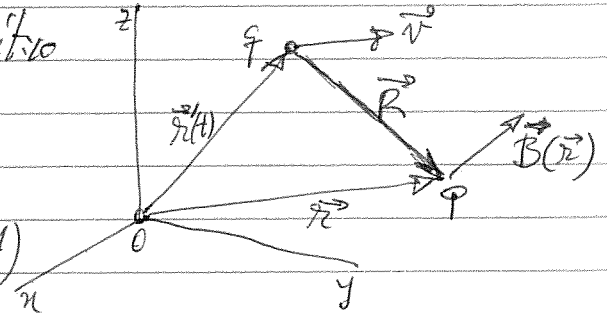
• Campo magnético de carga pontual móvel

8.5a

Considera-se uma carga pontual q móvel no referencial $Oxyz$, na posição $\vec{r}'(t)$, sendo a sua velocidade $\vec{v}$ nesse ponto. É criado um campo magnético $\vec{B}(\vec{r})$, expresso (para velocidade $|\vec{v}| \ll c$) por:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \times \hat{R}}{R^2}$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'; \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ NA}^{-2} \text{ (ou: TmA}^{-1}\text{, Hm}^{-1}\text{)}$$

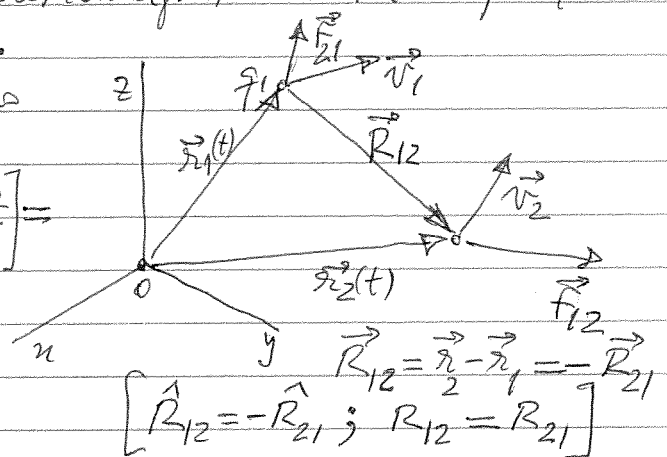


• Força magnética entre duas cargas pontuais móveis

Considera-se as cargas pontuais q_1, q_2 , cujos vetores de posição são $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)$. As velocidades respectivas são $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$; admite-se que $|\vec{v}_1|, |\vec{v}_2| \ll c$ (sendo $v_{1,2} = |\vec{v}_{1,2}| \ll c$, há que introduzir o efeito do tempo de propagação do campo eletromagnético entre as posições de q_1 e q_2 : ação não instantânea).

- A força magnética sobre q_2 devida ao campo magnético de q_1 é:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= q_2 \vec{v}_2 \times \vec{B}_1 = q_2 \vec{v}_2 \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 \vec{v}_1 \times \hat{R}_{12}}{R_{12}^2} \right] = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2 v_1 v_2}{R_{12}^2} [\hat{v}_2 \times (\hat{v}_1 \times \hat{R}_{12})] \end{aligned}$$



$$[\hat{R}_{12} = -\hat{R}_{21}; R_{12} = R_{21}]$$

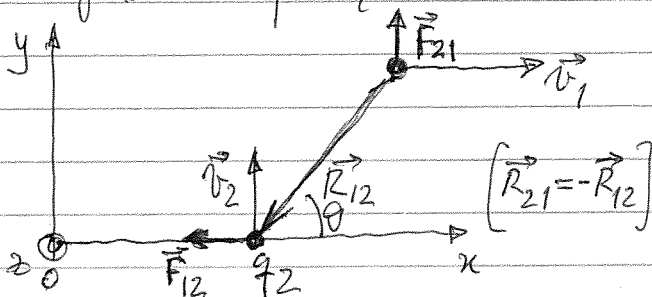
- A força magnética sobre q_1 devida ao campo magnético de q_2 escreve-se

$$\vec{F}_{21} = q_1 \vec{v}_1 \times \vec{B}_2 = q_1 \vec{v}_1 \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_2 \vec{v}_2 \times \hat{R}_{21}}{R_{21}^2} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2 v_1 v_2}{R_{21}^2} [\hat{v}_1 \times (\hat{v}_2 \times \hat{R}_{21})]$$

Em geral, a força total sobre o sistema de duas cargas, e o momento de força total sobre o sistema de duas cargas, não são nulos.

A conservação de momento linear e de momento angular do sistema resulta da consideração de uma contribuição adicional do momento linear e do momento angular do campo eletromagnético associado às duas cargas pontuais móveis. Os seguintes exemplos ilustram esta situação de força e momento de força.

- Cargas com posições e velocidades como indicado na figura:

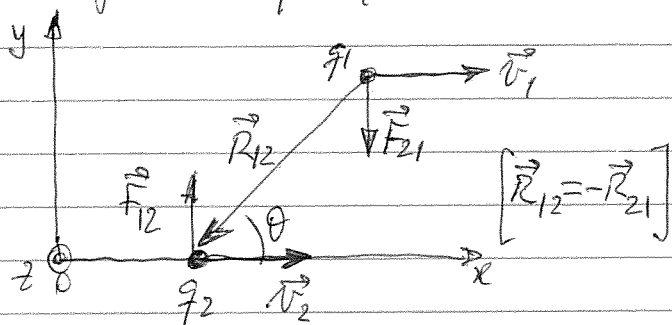


$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2 v_1 v_2}{R_{12}^2} [\hat{y} \times (\hat{z} \times \hat{R}_{12})] = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2 v_1 v_2}{R_{12}^2} \sin\theta (-\hat{z}). \end{aligned}$$

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2 v_1 v_2}{R_{21}^2} [\hat{x} \times (\hat{y} \times \hat{R}_{21})] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2 v_1 v_2}{R_{12}^2} \cos\theta (+\hat{y})$$

Na posição em que as partículas se situam alinhadas segundo $\hat{y}$, ou seja, $x_1 = x_2$ ou $\theta = \pi/2$, resulta $\vec{F}_{12} \neq 0$ e $\vec{F}_{21} = 0$. Nesta situação, existe resultante não-nula de força sobre o sistema de cargas; há aceleração da carga q_2 , e o momento linear mecânico do sistema não é conservado.

→ Cargas com posições e velocidades como indicado na figura:



$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2 v_1 v_2}{R_{12}^2} [\hat{x} \times (\hat{x} \times \hat{R}_{12})] = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2 v_1 v_2}{R_{12}^2} \sin\theta (\hat{y}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{21} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2 v_1 v_2}{R_{21}^2} [\hat{x} \times (\hat{x} \times \hat{R}_{21})] = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2 v_1 v_2}{R_{12}^2} \sin\theta (-\hat{y}) \end{aligned}$$

Resulta uma força total sobre o sistema de cargas que é nula.

Mas as forças $\vec{F}_{12}$ e $\vec{F}_{21}$ constituem um binário de momento não-nulo. Assim, não se verifica conservação do momento angular mecânico do sistema de cargas.

Assim, é necessário introduzir o momento linear e o momento angular do campo eletromagnético devido às cargas móveis para se verificar a conservação de momentos totais, mecânico e eletromagnético.

$$\vec{B}_{\vec{r}'} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q'}{R^2} \vec{r}' \times \hat{R}$$

Para a carga elementar no volume dv' , vem diretamente

$$d\vec{B}_{dv'} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Nq' dv'}{R^2} \vec{r}' \times \hat{R}$$

em que N' é a densidade volumétrica de portadores de carga q' . Sendo a densidade de corrente escrita como

$$\vec{J}'(\vec{r}') = N' q' \vec{r}'$$

resulta, integrando sobre V' :

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}'(\vec{r}') \times \hat{R}}{R^2} dv'} \quad (\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}')$$

É imediata a adaptação desta expressão ao caso do campo magnético criado por uma distribuição superficial de corrente de densidade $\vec{J}'_s$ em S' :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\vec{J}'_s(\vec{r}') \times \hat{R}}{R^2} dS'$$

No caso de a corrente ser filiforme, circulando no percurso C' , basta atender à substituição $\vec{J}' dv' \rightarrow I' d\vec{\ell}'$, resultando

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I' \int_{C'} \frac{d\vec{\ell}' \times \hat{R}}{R^2}} \quad (\text{Lei de Biot e Savart})$$

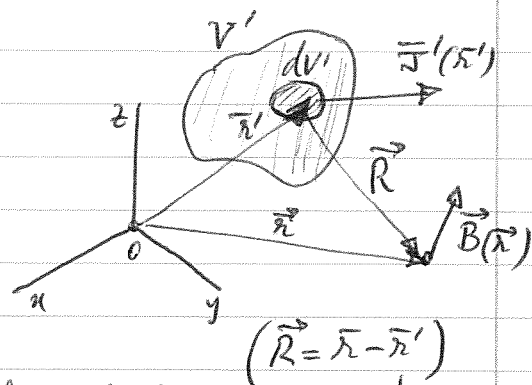
Estas expressões podem ser comparadas com as correspondentes ao cálculo do campo elétrico $\vec{E}$ criado por distribuições de carga elétrica.

As linhas de força do campo magnético são definidas pela equação diferencial

$$\boxed{\vec{B} \times d\vec{r} = 0}$$

sendo tangentes, em cada ponto, ao vetor $\vec{B}$.

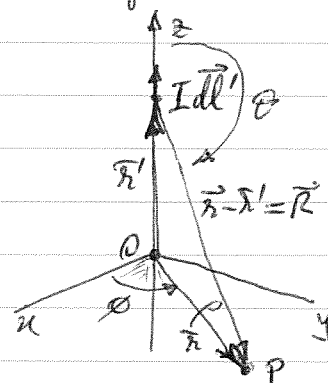
Os exemplos seguintes ilustram a aplicação da lei de Biot e Savart a situações simples, de elevada simetria, e com relevância prática.



A lei de Biot e Savart aplica-se em situações de correntes elétricas ($\vec{J}, I$) invariantes ou com variação temporal lenta (ex: 50 Hz da rede). Mas ainda, em boa aproximação, quando a variação temporal é lenta.

Corrente retilínea

Seja uma corrente retilínea (infinita) I segundo o eixo z . O campo magnético deverá ser independente de z , e apresentar simetria cilíndrica em torno da corrente. Assim, considerando um elemento da corrente $d\vec{l}' = (0, 0, dz')$ e um ponto $P(\vec{r}) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 0)$, resulta para o numerador da expressão do integrando da lei de Biot e Savart:



$$d\vec{l}' \times \hat{R} = dz' \sin \theta \cdot \hat{\phi}$$

Logo:

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = \frac{\rho}{\sin \theta}$$

$$z' = -\frac{\rho}{\tan \theta}; \quad dz' = \rho \tan^2 \theta \, d\theta = \frac{\rho}{\sin^2 \theta} d\theta$$

vem:

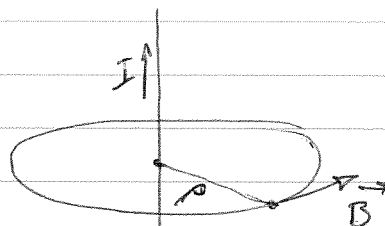
$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \hat{\phi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\left(\frac{\rho}{\sin^2 \theta} d\theta\right) (\sin \theta)}{\left(\frac{\rho}{\sin \theta}\right)^2} = \hat{\phi} \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta = \\ &= \hat{\phi} \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} (-\cos \theta) \Big|_0^\pi \end{aligned}$$

Logo:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \hat{\phi}}$$

(Resultado numericamente, para $I=10\text{ A}$ e $\rho=0.1\text{ m}$, $B=20\mu\text{T}$)

As linhas de força são circunferências em planos normais à corrente, com centro na corrente, e a amplitude do campo magnético diminui com o inverso da distância à corrente. O sentido de $\vec{B}$ nas linhas de força corresponde ao avanço de uma hélice direita segundo o sentido da corrente.



Assumir-se que a corrente retilínea era do tipo corrente de condução, sendo, portanto, nula a densidade de carga elétrica na recta. Admitindo, agora, que a corrente I é uma corrente de condução, resultante de uma densidade

linhas de carga σ no eixo zz , movendo-se com velocidade v , resulta um campo elétrico $\vec{E}$ além do campo magnético $\vec{B}$. Admitindo que o valor de $\vec{E}$ é dado pela expressão da Electrostatica, e como $I = \sigma v$, vem

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{\rho} \quad ; \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\phi}$$

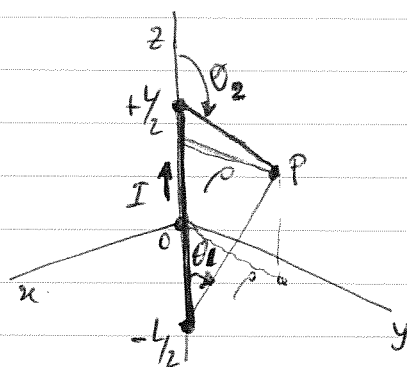
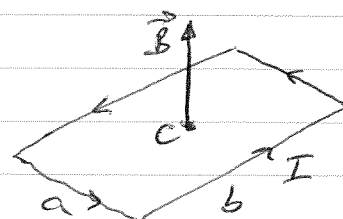
donde: $\frac{B}{E} = \epsilon_0 \mu_0 v \quad ; \quad \text{ou, sendo } c^2 = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1}, \quad \frac{cB}{E} = \frac{v}{c}$

— Espira rectangular de corrente: campo no centro da espira

O campo $\vec{B}$ no centro da espira rectangular ($a \times b$) resulta da sobreposição dos campos criados pelas correntes nos quatro lados da espira.

Estes campos parciais determinam-se imediatamente a partir do cálculo do exemplo anterior; assim, um "segmento de corrente" segundo zz e com extensão de $-L/2$ a $+L/2$ produz, num qualquer ponto P a distância ρ do eixo zz , um campo magnético

$$\vec{B}_L = \hat{\phi} \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta \cdot d\theta$$



donde:

$$\boxed{\vec{B}_L = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \left[\frac{\cos\theta_1 - \cos\theta_2}{2} \right] \hat{\phi}}$$

em que (ver figura) θ_1 e θ_2 são medidos nos sentidos positivos indicados relativamente ao sentido positivo da corrente I . No plano mediano Oxy , sendo $\cos\theta = \cos\theta_1 = -\cos\theta_2$, vem

$$\begin{aligned} \vec{B}_L(z=0) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \cos\theta \cdot \hat{\phi} = \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \frac{L/2}{[\rho^2 + (L/2)^2]^{1/2}} \hat{\phi} \end{aligned}$$

Usando um sistema de coordenadas com a origem no ponto

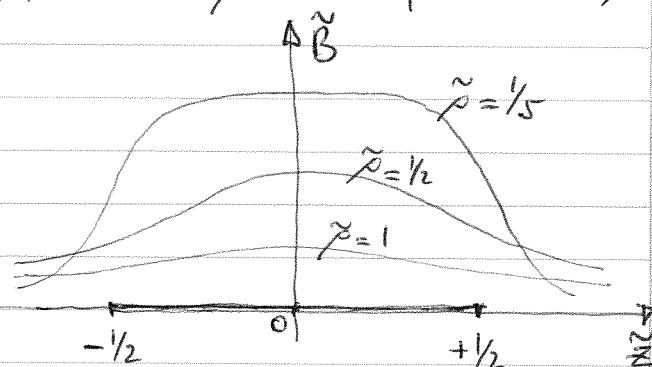
médio do "segmento de corrente" e as variáveis normalizadas

$$\begin{cases} \tilde{x} = x/L \\ \tilde{z} = z/L \end{cases} \quad \tilde{B} = \frac{B}{\left(\frac{\mu_0 I}{4\pi L}\right)}$$

resulta:

$$\tilde{B} = \frac{1}{\tilde{x}} \left[\frac{(\frac{1}{2} - \tilde{z})}{\sqrt{\tilde{x}^2 + (\frac{1}{2} - \tilde{z})^2}} + \frac{(\frac{1}{2} + \tilde{z})}{\sqrt{\tilde{x}^2 + (\frac{1}{2} + \tilde{z})^2}} \right]$$

A representação gráfica de $\tilde{B}(\tilde{z})$, usando $\tilde{x}$ como parâmetro, encontra-se na figura, que evidencia o facto de, para pontos próximos do "segmento de corrente" ($\tilde{x} \ll 1$), o campo magnético ser significativo apenas na extensão da corrente ($|\tilde{z}| \leq \frac{1}{2}$).



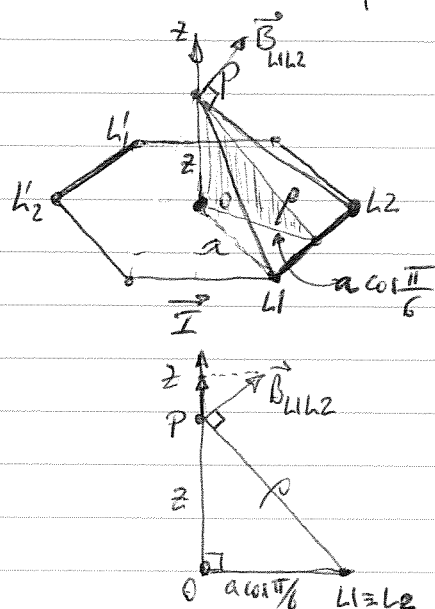
Aplicando o resultado do campo do "segmento de corrente", obtém-se para o campo magnético no centro da espira rectangular

$$\left[B(C) = 2 \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \right]$$

donde, para uma espira quadrada de lado a , tem-se

$$\boxed{B(C) = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}}$$

O cálculo do campo magnético pode ainda efetuar-se, com simplicidade e a partir do campo do "segmento de corrente", em pontos do eixo normal a uma espira poligonal regular e que passa no centro da espira, como ilustra a figura para o caso de um hexágono regular, inscrito numa circunferência de raio a . De notar que os lados opostos $L_1 L_2$ e $L'_1 L'_2$ produzem campos cuja soma só tem componente $\hat{z}$.



- Corrente planar uniforme

Seja a corrente de densidade superficial $\vec{J}_s = J_{s0} \hat{x}$ fluindo no plano $y=0$. O campo magnético, por simetria, não deverá depender de x nem de z , e não tem componente paralela à corrente ($\hat{x}$). Elementos de corrente $J_{s0} dz \hat{x}$, simétricos ($\pm z$) relativamente ao plano Oxy em que se situa o ponto P em que se calcula o campo, produzem apenas uma componente $\hat{z}$. Assim, o campo magnético será da forma $\vec{B} = B(y) \hat{z}$, com:

$$B(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0 J_{s0} \sin \alpha}{2\pi (y^2 + z^2)^{3/2}} dz =$$

$$= \frac{\mu_0 J_{s0}}{2\pi} y \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{y^2 + z^2} = \frac{\mu_0 J_{s0}}{2\pi} \left. \arctan \frac{z}{y} \right|_{-\infty}^{+\infty}$$

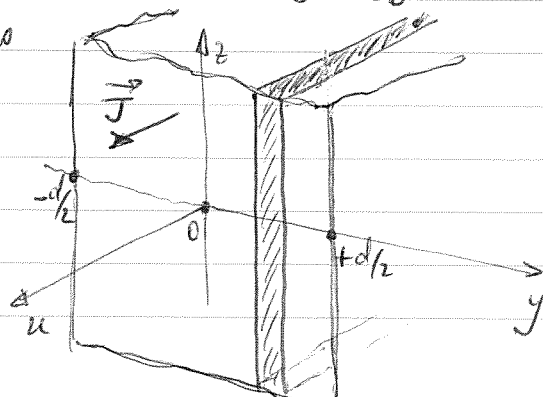
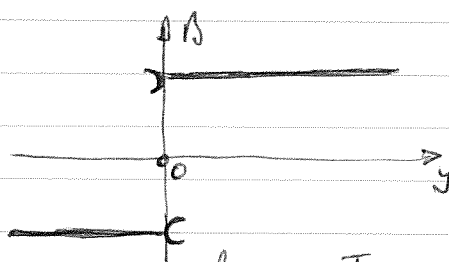
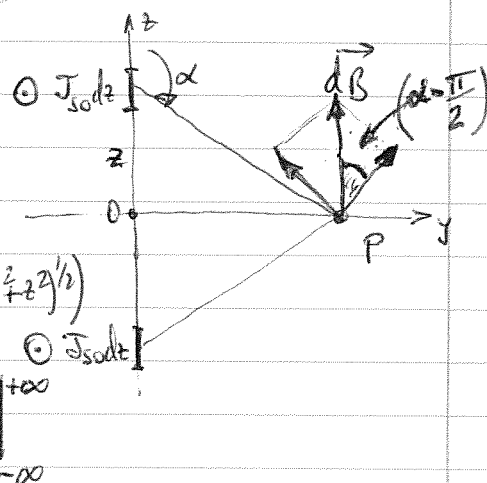
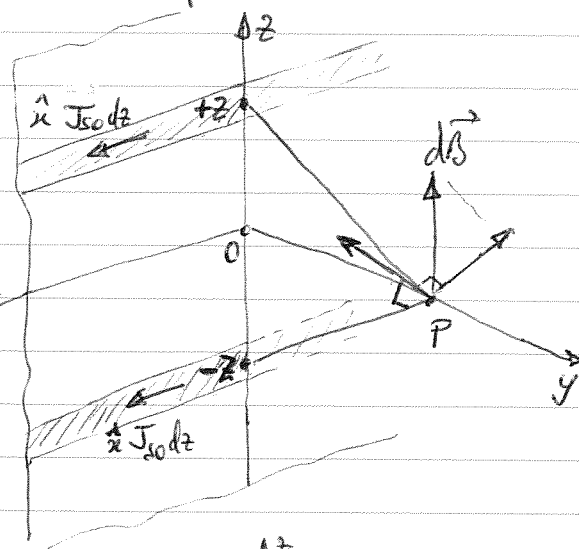
donde:

$$B(y) = \begin{cases} +\frac{\mu_0 J_{s0}}{2} & , y > 0 \\ -\frac{\mu_0 J_{s0}}{2} & , y < 0 \end{cases}$$

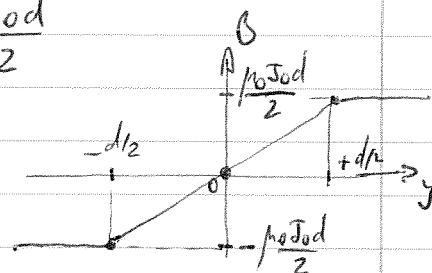
A descontinuidade do campo magnético em $y=0$ vale $\mu_0 J_{s0}$. É interessante confrontar este resultado com o campo electrostático devido a um plano carregado uniformemente.

- Distribuição uniforme de corrente entre planos paralelos

Seja agora a densidade volumétrica de corrente $\vec{J} = J_0 \hat{x}$ situada em $-d/2 \leq y \leq +d/2$. Considerando "folhas elementares" de corrente de espessura dy , e usando o resultado do exemplo anterior, conclui-se que o campo magnético é da forma $\vec{B} = B(y) \hat{z}$, com:

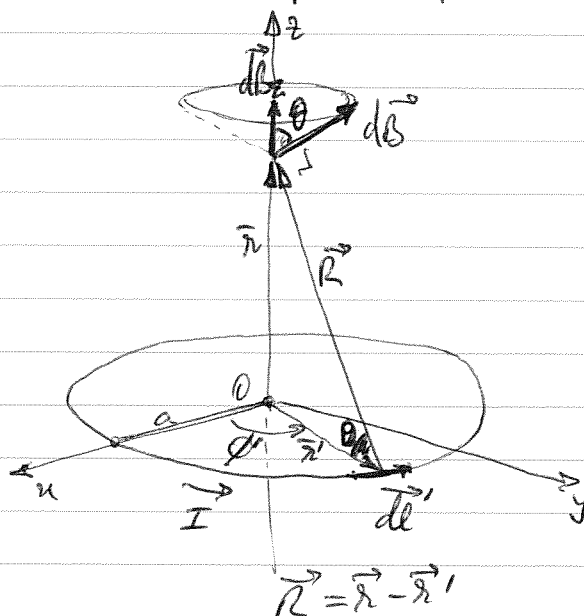


$$\begin{cases}
 y < -d/2 : B(y) = - \int_{-d/2}^{+d/2} \frac{\mu_0 J_0 dy'}{2} = - \frac{\mu_0 J_0 d}{2} \\
 -d/2 \leq y \leq +d/2 : B(y) = \int_{-d/2}^y \frac{\mu_0 J_0 dy'}{2} + \int_y^{+d/2} \frac{-\mu_0 J_0 dy'}{2} = +\mu_0 J_0 y \\
 +d/2 < y : B(y) = \int_{-d/2}^{+d/2} \frac{\mu_0 J_0 dy'}{2} = + \frac{\mu_0 J_0 d}{2}
 \end{cases}$$



— Espira circular de corrente: campo no eixo de simetria normal

Seja uma espira circular (raio a) centrada no plano Oxy e em que circula a corrente I . O vector campo magnético $d\vec{B}$, num ponto do eixo zz , devido a um elemento de corrente $I d\vec{\ell}'$, é normal ao plano definido por $d\vec{\ell}'$ e $\vec{R}$; quando $d\vec{\ell}'$ percorre a espira circular, $d\vec{B}$ descreve uma superfície cônica de semi-abertura θ e eixo zz . Assim, o campo total devido à espira de corrente só apresenta a componente zz . Tem-se:



$$\begin{cases}
 d\vec{\ell}' = a d\phi \cdot \hat{\phi} \\
 R = \sqrt{a^2 + z^2} \\
 dB_z = dB \cdot \cos \theta = dB \cdot (a/R)
 \end{cases}$$

Assim:

$$B_z = \int_{\text{Espira}} dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a d\phi}{R^2} \cdot \frac{a}{R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a^2}{R^3} \int_0^{2\pi} d\phi$$

donde:

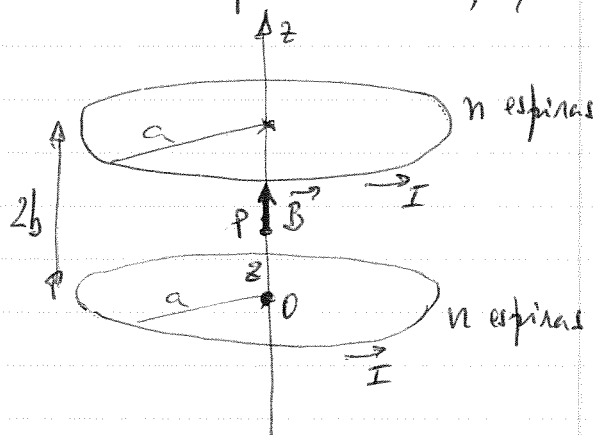
$$\boxed{\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}}$$

Para I no sentido indicado na figura, $\vec{B}$ resulta no sentido positivo do eixo zz . No centro da espira ($z=0$):

$$\vec{B}(0,0,0) = \frac{\mu_0 I}{2a} \hat{z}$$

8.50 Bobinas de Helmholtz

As bobinas de Helmholtz apresentam a configuração ilustrada na figura. Supõe-se, em boa aproximação, que cada bobina (constituída por n espiras de raio a) produz um campo magnético que tem a mesma descrição do campo de uma única espira circular, mas com amplitude multiplicada por n . As bobinas são normais ao eixo zz e nele centradas, estando afastadas de $2b$; toma-se a origem O no centro de uma bobina. Circula nas bobinas uma corrente I , no mesmo sentido.



Num ponto $P(0,0,z)$ do eixo o campo magnético vale, portanto:

$$\vec{B} = B(z) \hat{z} = \frac{\mu_0 n I a^2}{2} \left[\frac{1}{(z^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{1}{[(2b-z)^2 + a^2]^{3/2}} \right] \hat{z}$$

atendendo à sobreposição dos campos das espiras circulares. O sentido de $\vec{B}$ está de acordo com o sentido de I na figura. Calculando a derivada dB/dz ,

$$\frac{dB}{dz} = \frac{\mu_0 n I a^2}{2} \left\{ -\frac{3}{2} \frac{2z}{(z^2 + a^2)^{5/2}} + \frac{3}{2} \frac{2(2b-z)}{[(2b-z)^2 + a^2]^{5/2}} \right\}$$

verifica-se que se anula para $z=b$, ou seja, no ponto médio entre os centros das bobinas. Determinando a segunda derivada,

$$\frac{d^2B}{dz^2} = -\frac{3\mu_0 n I a^2}{2} \left\{ \frac{1}{(z^2 + a^2)^{5/2}} - \frac{5}{2} \frac{2z^2}{(z^2 + a^2)^{7/2}} + \frac{1}{[(2b-z)^2 + a^2]^{5/2}} - \frac{5}{2} \frac{2(2b-z)^2}{[(2b-z)^2 + a^2]^{7/2}} \right\}$$

No ponto médio ($z=b$), esta derivada anula-se se $2b=a$. Para esta configuração, o campo no ponto médio vale:

$$B(z = \frac{a}{2}) = \left(\frac{8}{5^{3/2}} \right) \frac{\mu_0 n I}{a} \quad (2b = a)$$

(Sendo $n=100$, $I=10\text{ A}$, $a=0.30\text{ m}$, resulta $B(a/2) \approx 3\text{ mT}$).

Calculando o campo magnético em pontos axiais próximos do ponto médio através de uma expansão em série, resulta (sendo $2b=a$):

$$B(z \sim a/2) = B(z = \frac{a}{2}) + \frac{1}{24} \left(z - \frac{a}{2} \right)^4 \left. \frac{d^4 B}{dz^4} \right|_{z = \frac{a}{2}} + \dots$$

donde:

$$B(z \sim a/2) = B\left(\frac{a}{2}\right) \left[1 - \frac{144}{125} \left(\frac{z - a/2}{a} \right)^4 \right]$$

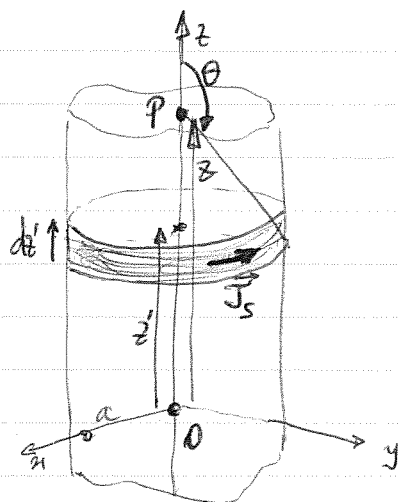
Para $|z - a/2| < a/10$, o desvio relativo do valor do campo para o valor no ponto médio é da ordem de 1.5×10^{-4} .

A configuração das bobinas de Helmholtz é usada para se obter um campo magnético razoavelmente uniforme em torno do ponto médio. Em particular, através de orientação apropriada das bobinas e ajuste da corrente I , pode ser criado um campo magnético oposto ao campo magnético terrestre; nessa situação, num volume em torno do ponto médio, o campo magnético total será muito próximo de zero.

8.6. Solenoide: campo magnético no eixo

Supõe-se uma distribuição superficial de corrente de densidade $\vec{J}_s = J_s \hat{\phi}$ circulando azimutalmente numa superfície cilíndrica com eixo segundo zz e de raio a . Pretende-se calcular o campo magnético num ponto axial $P(0,0,z)$. O campo elementar criado por um "anel de corrente" elementar situado no plano z' e de altura dz' , no ponto P , resulta directamente do cálculo do campo de uma espira circular:

$$\begin{aligned} d\vec{B}(0,0,z) &= \hat{z} \frac{\mu_0 (J_s dz') a^2}{2 [a^2 + (z-z')^2]^{3/2}} = \\ &= \hat{z} \frac{\mu_0 J_s}{2a} \left[1 + \left(\frac{z-z'}{a} \right)^2 \right]^{-3/2} dz' \end{aligned}$$



Para um solenoide de comprimento L centrado na origem, resulta então um campo axial $\vec{B}(z) = B(z) \hat{z}$, com

$$B(z) = \frac{\mu_0 J_s}{2a} \int_{-L/2}^{+L/2} \left[1 + \left(\frac{z-z'}{a} \right)^2 \right]^{-3/2} dz'$$

Fazendo a mudança de variáveis

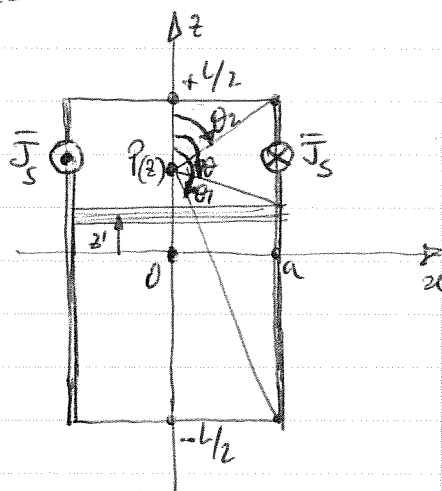
$$\frac{z-z'}{a} = -\cot \theta$$

vem:

$$dz' = -a \csc^2 \theta \cdot d\theta$$

donde:

$$B(z) = \frac{\mu_0 J_s}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (-\sin \theta) d\theta$$



Resulta o campo

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J_s}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \hat{z} \quad (\text{em } (0,0,z))$$

Para um solenoide longo ($L \gg a$) e com o ponto axial $P(0,0,z)$ bem no seu interior ($z \sim 0$), $\theta_1 \approx \pi$ e $\theta_2 \approx 0$, donde um campo axial quase constante com o valor

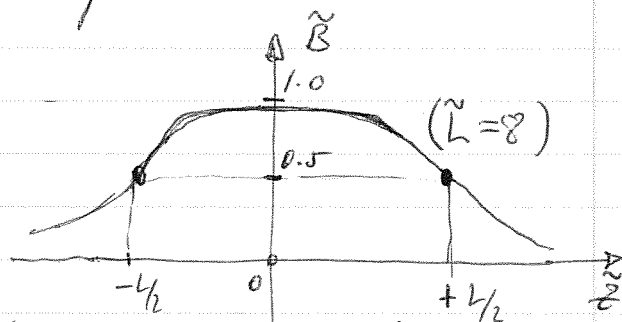
$$\vec{B} = \mu_0 J_s \hat{z} \quad (L \gg a; z \sim 0)$$

Numa melhor aproximação, tem-se: $\theta_1 \approx \pi - a/(L/2 + z)$ e $\theta_2 \approx a/(L/2 - z)$

Conservando os termos quadráticos na expansão de $\cos \theta_{1,2}$, vem: $B(z) \approx \mu_0 J_s \left[1 - \frac{a^2}{4z^2} - \frac{a^2}{4(L-z)^2} \right]$

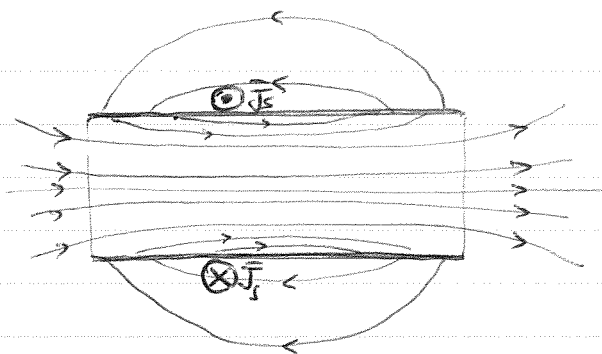
Para o ponto central ($z=0$) e $L/a = 10$, o desvio relativo para o valor $\mu_0 J_s$ é da ordem de 2%.

A figura mostra o campo magnético normalizado $\tilde{B} = B/(\mu_0 J_s)$ em função da coordenada normalizada no eixo do solenoide ($\tilde{z} = z/a$) para a situação particular $L=8a$ ($\tilde{L} = L/a = 8$)



O traçado das linhas de força do campo $\vec{B}$ do solenoide, ilustrado na figura seguinte, revela que o campo é quase uniforme e aproximadamente

axial bem no interior do solenoide.



Na prática, a corrente azimutal $\vec{J}_s = J_s \hat{\phi}$ é aproximada por um enrolamento helicoidal de passo muito pequeno de um condutor filiforme, em que circula uma corrente I . As expressões anteriores são, em geral, boas aproximações, fazendo

$$\boxed{\vec{J}_s = NI}$$

em que N é o número de espiras por unidade de comprimento axial:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{B}(0,0,z) &= \frac{\mu_0 NI}{2} (\cos\theta_2 - \cos\theta_1) \hat{z} \\ \vec{B}(0,0,0) &= \mu_0 NI \hat{z} \\ L &\rightarrow \infty \end{aligned}}$$

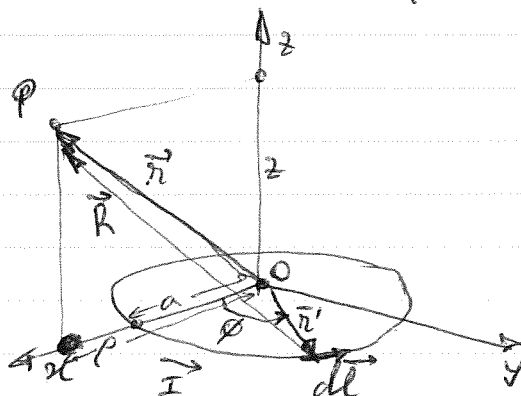
(Fazendo $N=10^3 \text{ m}^{-1}$, $I=1\text{A}$, resulta $B \approx 10^{-3} \text{ T}$).

8.7o Campo magnético de uma espira circular de corrente: aproximação dipolar

O cálculo do campo magnético criado por uma corrente elétrica constante circulando numa espira circular em pontos fora do eixo de simetria normal à espira é complexo quando comparado com o cálculo do campo em pontos desse eixo.

Considere-se uma espira circular, de raio a centrada na origem e no plano Oxy , em que circula a corrente I . O campo magnético correspondente deverá ter linhas de força com simetria rotacional em torno do eixo zz , normal à espira. Assim, sem perda de generalidade, considere-se o ponto P onde se calcula o campo no plano Oxz .

O campo $d\vec{B}$ de um elemento



de corrente $d\vec{l}$ esmure-n

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}$$

com:

$$d\vec{l} = a d\phi \cdot \hat{\phi} \quad ; \quad \hat{\phi} = -\sin\phi \cdot \hat{x} + \cos\phi \cdot \hat{y}$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' \quad ; \quad \vec{r} = \rho \hat{x} + z \hat{z}$$

$$\vec{r}' = a \cos\phi \cdot \hat{x} + a \sin\phi \cdot \hat{y}$$

$$R^3 = [a^2 + z^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos\phi]^{3/2} = [r^2 + a^2 - 2a\rho \cos\phi]^{3/2}$$

$$\begin{aligned} d\vec{l} \times \vec{R} &= a d\phi \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ \rho - a\cos\phi & -a\sin\phi & z \end{vmatrix} = \\ &= a d\phi [z \cos\phi \cdot \hat{x} + z \sin\phi \cdot \hat{y} + (a - \rho \cos\phi) \hat{z}] \end{aligned}$$

Considerando elementos de corrente $d\vec{l}$ em posições simétricas ($\pm\phi$) relativamente ao plano que contém P, é imediato verificar que a sua contribuição para a componente $\hat{y}$ de $d\vec{B}$ é nula. O denominador da expressão de $d\vec{B}$ pode esmure-n como

$$R^{-3} = r^{-3} \left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 - \frac{2a\rho}{r^2} \cos\phi \right]^{-3/2} \simeq$$

$$\simeq r^{-3} \left[1 + \frac{3a\rho}{r^2} \cos\phi \right] \quad (\text{aproximação dipolar válida para } r \gg a)$$

Donde, e atendendo à simetria em ϕ ($\int_{-\pi}^{+\pi} (\dots) d\phi = 2 \int_0^{\pi} (\dots) d\phi$), resulta:

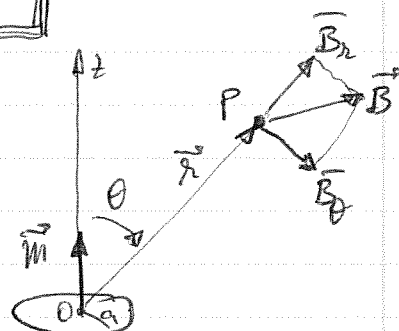
$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &\simeq \frac{\mu_0 I a}{2\pi r^3} \int_0^{\pi} [z \cos\phi \hat{x} + (a - \rho \cos\phi) \hat{z}] \cdot \left[1 + \frac{3a\rho}{r^2} \cos\phi \right] d\phi = \\ &= \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi r^3} \int_0^{\pi} \left[\hat{z} + \left(\frac{3\rho}{r^2} \cos^2\phi\right) \cdot (z \hat{x} + \rho \hat{z}) \right] d\phi = \\ &= \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi r^3} \left[\left(\frac{3z^2}{r^2} - 1\right) \hat{z} + \left(\frac{3\rho z}{r^2}\right) \hat{x} \right] \end{aligned}$$

Usando a definição de momento dipolar magnético da espira de corrente,

$$\boxed{\vec{m} = (\pi a^2) I \hat{z}}$$

e coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , vem

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{m}{r^3} (2 \cos\theta \cdot \hat{r} + \sin\theta \cdot \hat{\theta})}$$



ou, equivalentemente, usando uma outra base de representação ($\hat{m}$, $\hat{r}$):

$$\vec{B}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^3} [3(\hat{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \hat{m}]$$

Estas expressões do campo $\vec{B}$ do dipolo magnético $\vec{m}$ comparam-se, directamente, com as correspondentes ao campo eléctrico $\vec{E}$ do dipolo eléctrico $\vec{p}$.

A equação das linhas de força é

$$\vec{B} \times d\vec{r} = 0, \text{ sendo } d\vec{r} = dr \cdot \hat{r} + r d\theta \cdot \hat{\theta}$$

Assim: $2 \cos \theta \cdot r d\theta = \sin \theta dr$

ou: $\frac{dr}{r} = 2 \cot \theta \cdot d\theta$

Integrando: $\ln r = 2 \ln(\sin \theta) + C$

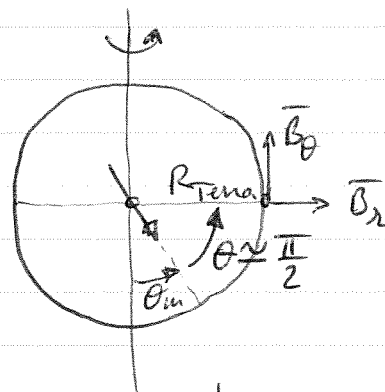
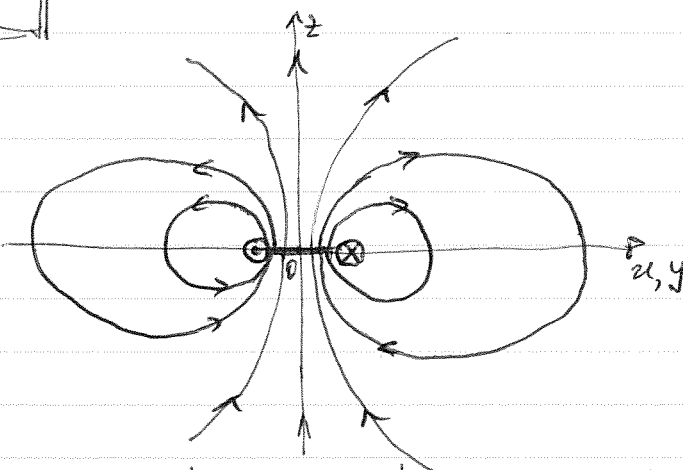
ou

$$r = r_0 \sin^2 \theta \quad (\text{fazendo } C = \ln r_0).$$

Em primeira aproximação, o campo magnético terrestre pode assumir-se como sendo resultante de um dipolo magnético $\vec{m}$. A orientação de $\vec{m}$ varia ao longo do tempo geológico e depende

do ponto de observação na superfície terrestre, não coincidindo com o eixo de rotação da Terra. No Equador ($\theta \approx \pi/2$) e na superfície da Terra tem-se

$$\begin{aligned} B_\theta &\approx -3 \times 10^{-5} \text{ T} \\ B_r &\ll B_\theta \end{aligned}$$



8.8. Força magnética e momento da força magnética

Seja uma corrente eléctrica definida por um vector densidade $\vec{J}$ sobre a qual actua o campo magnético $\vec{B}$ (criado por uma outra distribuição de corrente,

conforme analisado em anteriores secções deste capítulo, ou por magnetos permanentes ou correntes eléctricas em circuitos magnéticos, conforme discutido no capítulo ...).

A força magnética $d\vec{F}_m$ sobre as cargas eléctricas móveis no elemento de volume dV escreve-se, recorrendo ao princípio de sobreposição e à expressão da força magnética sobre cargas pontuais:

$$d\vec{F}_m = (N dV) q \vec{v} \times \vec{B}$$

em que N é a densidade volumétrica de portadores de carga q , que se movem com velocidade $\vec{v}$. Como a densidade de corrente se escreve $\vec{J} = Nq\vec{v}$, resulta

$$d\vec{F}_m = \vec{J} dV \times \vec{B}$$

Tal permite definir a densidade volumétrica de força magnética como

$$\boxed{\vec{F}_m = \vec{J} \times \vec{B}}$$

O momento de $d\vec{F}_m$ relativamente à origem O escreve-se, então, como

$$d\vec{\tau}_m = \vec{r} \times d\vec{F}_m = \vec{r} \times (\vec{J} dV \times \vec{B})$$

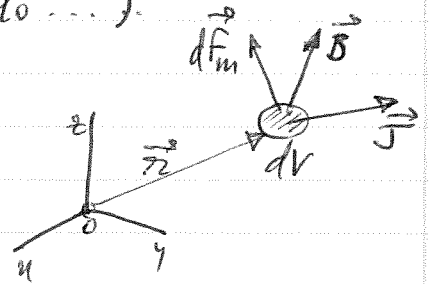
e daí a definição da densidade volumétrica de momento de força magnética (relativamente à origem)

$$\boxed{\vec{\tau}_m = \vec{r} \times (\vec{J} \times \vec{B})}$$

A força magnética total e o momento de força magnética total correspondentes a uma distribuição finita de corrente de densidade $\vec{J}$ num volume V actuado por um campo magnético externo $\vec{B}$ calculam-se por aplicação do princípio de sobreposição:

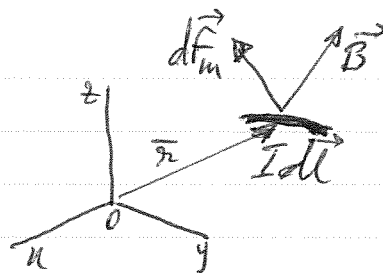
$$\left[\begin{aligned} \vec{F}_m &= \int_V \vec{J} \times \vec{B} dV \\ \vec{\tau}_m &= \int_V \vec{r} \times (\vec{J} \times \vec{B}) dV \end{aligned} \right]$$

Importa analisar o caso de correntes eléctricas filiformes, em que $\vec{J} dV$ é substituído por $I d\vec{\ell}$ nas expressões anteriores (com $d\vec{\ell}$ no sentido da corrente I , como é óbvio). Resulta:



$$\boxed{d\vec{F}_m = I d\vec{l} \times \vec{B}} \quad (\text{força de Laplace})$$

Note-se que $d\vec{F}_m = 0$ quando a corrente elementar $I d\vec{l}$ é paralela ao campo magnético externo, e que $d\vec{F}_m$ é normal ao plano definido por $d\vec{l}$ e $\vec{B}$, sendo o triângulo $(d\vec{l}, \vec{B}, d\vec{F}_m)$ directo.

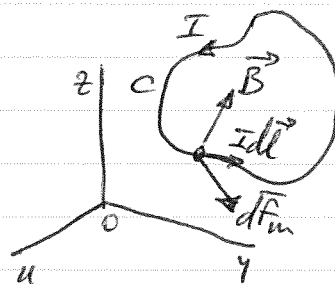


A força magnética sobre uma corrente filiforme finita circulando num percurso fechado C será, então, usando novamente o princípio de sobreposição:

$$\boxed{\vec{F}_m = \oint_C I d\vec{l} \times \vec{B} = I \oint_C d\vec{l} \times \vec{B}}$$

Se o campo magnético é uniforme, resulta:

$$\boxed{\vec{F}_m = I \left[\oint_C d\vec{l} \right] \times \vec{B} = 0} \quad (\vec{B} \text{ uniforme})$$



Anquanto ao momento da força $\vec{\tau}_m$, é possível obter uma relação interessante para $\vec{B}$ uniforme por simples manipulação matemática. O momento da força sobre C relativamente à origem O é

$$\vec{\tau}_m = I \oint_C \vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B})$$

Considerando as componentes cartesianas do integrando, tem-se:

$$[\vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B})]_x = y dz B_y - y dy B_x - z dx B_x + z dx B_z$$

$$[\vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B})]_y = z dy B_z - z dz B_y - x dx B_y + x dy B_x$$

$$[\vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B})]_z = x dz B_x - x dx B_z - y dy B_z + y dz B_y$$

com B_x, B_y, B_z constantes. Assim, na integração, surgem dois tipos de termos:

$$\oint_C \alpha d\alpha \quad \text{e} \quad \oint_C \alpha d\beta$$

em que α e β representam coordenadas distintas. No primeiro caso, o resultado é nulo (pois o percurso C é fechado); no segundo caso, considerando a projecção $C_{\alpha\beta}$ do percurso C no plano coordenado (α, β) , vem:

$$\oint_C \alpha d\beta = \oint_{C_{\beta}} \alpha(\beta) d\beta =$$

$$= \int_{\beta_1}^{\beta_2} \alpha_1(\beta) d\beta + \int_{\beta_2}^{\beta_1} \alpha_2(\beta) d\beta = S_F$$

em que S_F é o valor algébrico da área limitada por C_{β} no plano (α, β) , tomando a convenção habitual de sinais de sentido de avanço de uma hélice direita (no caso representado na figura, $S_F > 0$). Usando este resultado e a permutação cíclica de índices x, y, z , vem imediatamente que

$$\boxed{\vec{\tau}_m = I \vec{S} \times \vec{B}} \quad (\vec{B} \text{ uniforme})$$

em que $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ tem componentes que são os valores algébricos das áreas das projeções de C nos planos coordenados (yz, zx, xy) , respectivamente. Define-se o momento dipolar magnético $\vec{m}$ como

$$\boxed{\vec{m} = I \vec{S}} \quad [m] = [Am^2]$$

donde:

$$\boxed{\vec{\tau}_m = \vec{m} \times \vec{B}} \quad (\vec{B} \text{ uniforme})$$

Verifica-se facilmente, usando o método anterior, que

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \oint_C \vec{r} \times d\vec{l}$$

donde:

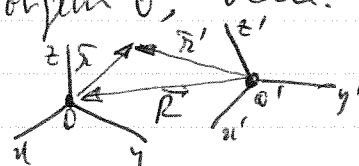
$$\boxed{\vec{m} = \frac{1}{2} I \oint_C \vec{r} \times d\vec{l}}$$

Considerando uma distribuição genérica de corrente de densidade $\vec{J}$ num volume V , em vez da corrente filiforme, o momento dipolar magnético respectivo esboça-se

$$\boxed{\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V \vec{r} \times \vec{J} dV}$$

Note-se que $\vec{m}$ é independente da origem considerada; fazendo $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{R}$, em que $\vec{R}$ é o vetor de posição constante da origem O relativamente à nova origem O' , vem:

$$\vec{m}' = \frac{1}{2} \int_V \vec{r}' \times \vec{J} dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{r} \times \vec{J} dV + \frac{1}{2} \vec{R} \times \int_V \vec{J} dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{r} \times \vec{J} dV = \vec{m}$$

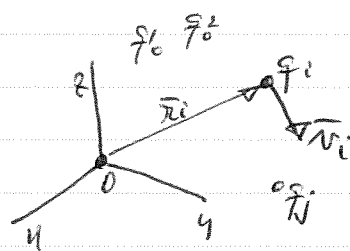


Se for considerado um sistema de cargas pontuais $\{q_i\}$ em movimento com velocidades $\{\vec{v}_i\}$ no referencial usado, o respectivo momento magnético é:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

Uma mudança de referencial para um novo referencial estacionário resulta em

$$\begin{aligned} \vec{m}' &= \frac{1}{2} \sum_i q_i \vec{r}'_i \times \vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum_i q_i (\vec{r}_i + \vec{R}) \times \vec{v}_i = \\ &= \vec{m} + \frac{1}{2} \vec{R} \times \left(\sum_i q_i \vec{v}_i \right) \end{aligned}$$

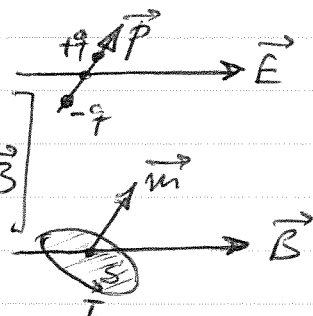


Conclui-se que $\vec{m}'$ coincide com $\vec{m}$ apenas se $\sum_i q_i \vec{v}_i = 0$

Os resultados obtidos para a força magnética e o momento de força magnética de um campo magnético $\vec{B}$ sobre um dipolo magnético de momento $\vec{m}$ podem ser confrontados com os resultados correspondentes para um dipolo eléctrico de momento $\vec{p}$ num campo eléctrico $\vec{E}$:

$$\vec{p} \leftrightarrow \vec{m}$$

Campos uniformes: $\left[\begin{array}{l} \vec{F}_e = 0 \leftrightarrow \vec{F}_m = 0 \\ \vec{\tau}_e = \vec{p} \times \vec{E} \leftrightarrow \vec{\tau}_m = \vec{m} \times \vec{B} \end{array} \right]$



Calculando o trabalho elementar dW

despendido na rotação do dipolo magnético

$\vec{m}$ de $d\theta$ contra a acção de um campo magnético externo $\vec{B}$, resulta:

$$dW = - \vec{\tau}_m \cdot d\vec{\theta}, \text{ com } [\vec{\tau}_m = \vec{m} \times \vec{B}]$$

Igualando esse trabalho à variação da energia potencial magnética do dipolo $\vec{m}$ no campo magnético externo $\vec{B}$, vem:

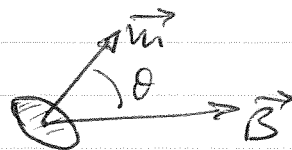
$$dU_m = m B \sin \theta d\theta$$

donde:

$$U_m = -m B \cos \theta$$

ou ainda:

$$U_m = - \vec{m} \cdot \vec{B}$$



Notar a analogia com o caso da energia de um dipolo eléctrico $\vec{p}$

num campo elétrico externo $\vec{E}$: $U_e = -\vec{p} \cdot \vec{E}$.

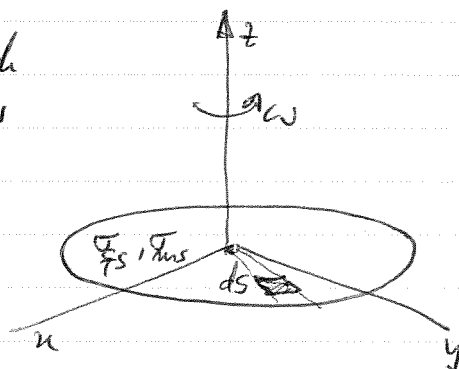
8.9. Momentos magnéticos de distribuições de cargas móveis

O cálculo do momento magnético de certas distribuições de carga móveis apresenta grande interesse, pelo que se discute diversos exemplos nesta seção.

— Disco carregado em rotação uniforme

Seja um disco circular de raio a , carga q e massa m distribuídas uniformemente, em rotação em torno de zz com velocidade angular ω . As densidades superficiais de carga e massa são

$$\sigma_s = q/\pi a^2, \quad \sigma_m = m/\pi a^2$$



A corrente elementar respeitante ao movimento da carga num elemento de área, $di = \frac{\omega}{2\pi} \sigma_s \cdot \rho d\rho d\phi$, corresponde o momento magnético

$$d\vec{m} = \frac{1}{2} \omega \sigma_s \rho^3 d\rho d\phi \hat{z}$$

donde o momento magnético total:

$$\vec{m} = \hat{z} \frac{1}{2} \omega \sigma_s \int_0^a \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{1}{4} \omega q a^2 \hat{z}$$

O momento angular L do disco vale, por sua vez,

$$\vec{L} = \hat{z} \int_0^a \int_0^{2\pi} \sigma_m \omega \rho^3 d\rho d\phi = \frac{1}{2} \omega m a^2 \hat{z}$$

Resulta a relação: $\vec{m} = \frac{1}{2} \frac{q}{m} \vec{L}$

— Esfera carregada em rotação uniforme

Considere-se uma esfera de raio a , massa m e carga q distribuídas uniformemente, centrada na origem e rodando à velocidade angular ω em torno de zz . A densidade volumétrica de carga vale $\sigma_v = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$. Um elemento de

volume $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$, com carga elementar $dq = \sigma_v dV$, descreve uma trajetória circular de raio $r \sin\theta$ em torno do eixo zz , à velocidade angular ω . Tal é equivalente a uma espira circular de corrente $di = dq \cdot \frac{\omega}{2\pi}$, a que

corresponde um momento magnético

$$d\vec{m} = [\pi (r \sin \theta)^2] di \hat{z} =$$

$$= \frac{1}{2} \sigma_{fv} \omega r^4 \sin^3 \theta d\theta d\phi \hat{z}$$

O momento total vale, então:

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \hat{z} \frac{1}{2} \sigma_{fv} \omega \int_0^a r^4 dr \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \\ &= \hat{z} \frac{4}{3} \pi \frac{a^5}{5} \sigma_{fv} \omega = \frac{1}{5} q \omega a^2 \hat{z} \end{aligned}$$

O momento angular $\vec{L}$ da esfera calcula-se de forma análoga, e vale $\vec{L} = \frac{2}{5} m \omega a^2 \hat{z}$, donde se conclui novamente que $\left[\vec{m} = \frac{1}{2} \frac{q}{m} \vec{L} \right]$

— Superfície esférica carregada em rotação uniforme

Supõe-se uma carga q distribuída uniformemente na superfície esférica de raio a , rodando em torno do z à velocidade angular ω . A densidade superficial de carga vale $\sigma_{fs} = q/4\pi a^2$.

Um elemento de área

$$dS = a^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

corresponde uma corrente elementar

$$di = \sigma_{fs} dS \cdot \frac{\omega}{2\pi}$$

e um momento magnético

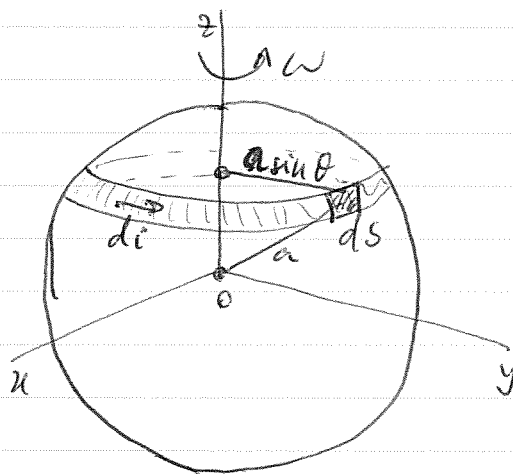
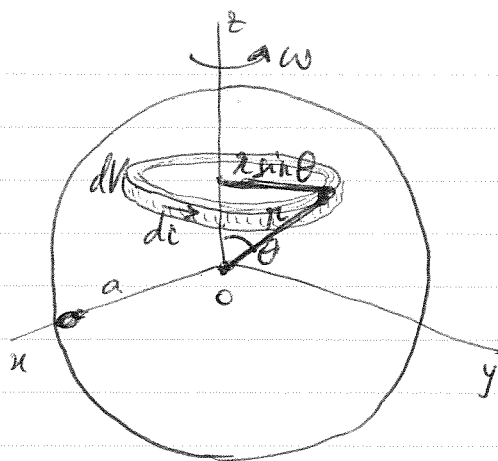
$$\begin{aligned} d\vec{m} &= [\pi (a \sin \theta)^2] di \hat{z} = \\ &= \hat{z} \frac{1}{2} a^4 \sigma_{fs} \omega \sin^3 \theta d\theta d\phi \end{aligned}$$

Donde o momento total

$$\vec{m} = \hat{z} \frac{1}{2} a^4 \sigma_{fs} \omega \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{1}{3} q a^2 \omega \hat{z}$$

O cálculo do momento angular $\vec{L}$ é simples. Supondo uma massa m da "casca esférica" ($\sigma_{ms} = m/4\pi a^2$), o momento elementar de dS vale

$$d\vec{L} = [(\sigma_{ms} dS) (\omega a \sin \theta)] a \sin \theta \hat{z}$$



Assim: $\vec{L} = \hat{z} \sigma_{ms} \omega a^4 \int_0^\pi \sin^3 \theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{2\pi}{3} \sigma_{ms} \omega a^4 = \frac{2}{3} m a^2 \omega \hat{z}$

Donde, novamente: $\left[\vec{m} = \frac{1}{2} \frac{q}{m} \vec{L} \right]$

— Momentos magnéticos orbital e de spin
É interessante calcular os momentos magnéticos de um electrão orbitando em torno do núcleo atómico ($\vec{m}_L$) e rodando sobre o seu eixo ($\vec{m}_S$).

Pode escrever-se $\vec{m}_L = I S \hat{n}$, sendo

$$I = (-e) \frac{L}{2\pi} = (-e) \frac{v}{2\pi r}$$

$$S = \pi r^2$$

em que r é o raio da órbita
e v a velocidade do electrão

O momento angular orbital é $\vec{L} = m_e v r \hat{n}$, em que m_e é a massa do electrão. Donde

$$\vec{m}_L = -\left(\frac{e}{2m_e}\right) \vec{L}$$

O factor $(e/2m_e)$ é designado razão giromagnética.
Segundo a Mecânica Quântica, a relação entre o momento magnético de spin $\vec{m}_S$ e o momento angular de spin $\vec{S}$ é

$$\vec{m}_S = 2 \left(-\frac{e}{2m_e}\right) \vec{S}$$

O momento angular total é $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, e o momento magnético total é $\vec{m} = \vec{m}_L + \vec{m}_S$, escrevendo-se

$$\vec{m} = g \left(-\frac{e}{2m_e}\right) \vec{J}$$

em que g é o factor de Landé.

Segundo a Mecânica Quântica, os valores possíveis da componente de $\vec{L}$ segundo uma direcção z são $L_z = [l, l-1, l-2, \dots, -(l-1), -l] \hbar$, em que o número quântico l é inteiro e $\hbar = h/2\pi = 1.06 \times 10^{-34} \text{ Js}$.
Para $l=1$, $L_z = \hbar, 0, -\hbar$, donde

$$m_{Lz} = -\frac{e}{2m_e} \hbar, 0, +\frac{e}{2m_e} \hbar$$

em que $\left[\frac{e\hbar}{2m_e} = 9.27 \times 10^{-24} \text{ Am}^2 \right]$ é o magneton de Bohr.

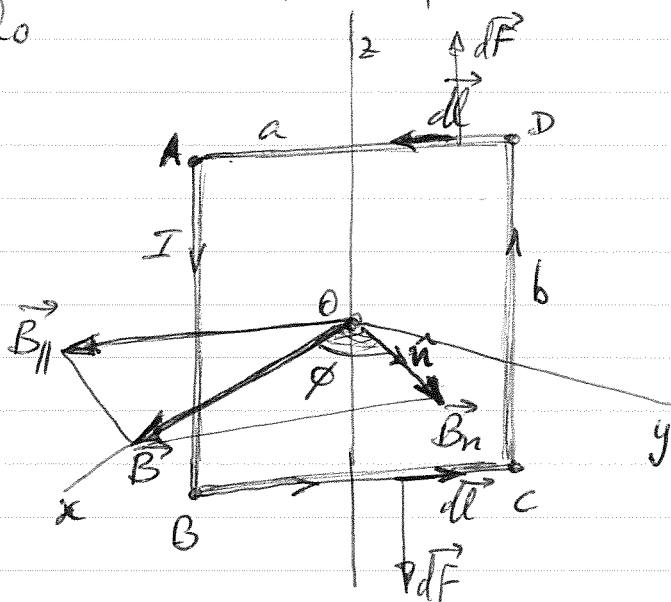
Igualmente da Mecânica Quântica, $S_z = \pm \hbar/2$, donde $m_{s_z} = \pm 1$ magnetão de Bohr.

8.10. Exemplos de cálculo de força e momento de força magnética

Nesta seção, são analisados exemplos importantes da ação mecânica sobre condutores em que circulam correntes elétricas devida a campos magnéticos.

— Campo magnético uniforme e espira retangular de corrente
 Seja um campo magnético uniforme $\vec{B} = (B, 0, 0)$ e uma espira retangular ($a \times b$) centrada na origem e com lados paralelos ao eixo z , em que circula a corrente I no sentido indicado na figura.

Recorrendo à lei de Laplace, $d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$, conclui-se que sobre os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ se recebem forças iguais em grandeza mas opostas, segundo z ; supondo a espira rígida, a sua resultante e o seu momento resultante são nulos.



Define-se o vetor normal à espira $\hat{n}$ no sentido do avanço de uma hélice direita rodando segundo o sentido da corrente I . Sobre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ a componente de $\vec{B}$ normal à espira ($B_{\perp}$) numa força resultante e um momento resultante nulos; a componente de $\vec{B}$ paralela à espira ($B_{\parallel}$) produz forças sobre esses lados dadas por

$$\vec{F}_{AB} = \mp I b B_{\parallel} \hat{n} = \mp I b B \sin\phi \hat{n}$$

Este binómio de forças tem resultante nula, e um momento

$$\vec{\tau} = I a b B \sin\phi (-\hat{z})$$

O momento de força $\vec{\tau}$ tenderá a rodar a espira em torno do eixo z ; sendo $\vec{B} \parallel \hat{n}$, o momento $\vec{\tau}$ anula-se,