

$$\phi(\vec{r}) = \begin{cases} X(x) Y(y) Z(z) & : \text{coordenadas cartesianas} \\ \rho(\rho) \Phi(\phi) Z(z) & : \text{coordenadas cilíndricas} \\ R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi) & : \text{coordenadas esféricas} \end{cases}$$

Obviamente, problemas a duas dimensões têm soluções mais simples que problemas tridimensionais, são ilustrativos da técnica e, eventualmente, representativos de soluções aproximadas de situações reais tridimensionais em regiões limitadas do espaço, pelo que são abordados em primeiro lugar, em cada sistema de coordenadas.

3.1.1. Distribuições bidimensionais do potencial

Supõe-se fronteiras condutoras carregadas no vácuo e assume-se, em boa aproximação, uma dependência bidimensional do potencial $\phi(x, y)$, que deve verificar a equação de Laplace em coordenadas cartesianas ortogonais:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

no espaço entre condutores. Adoptando o método de separação de variáveis, faz-se: $\phi(x, y) = X(x) Y(y)$

Tal é particularmente útil quando as fronteiras ocorrem em planos $x, y = \text{constante}$. Substituindo na equação de Laplace:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

O primeiro termo só depende de x , enquanto o segundo termo só depende de y ; assim, para que a equação anterior se verifique para x, y arbitrários, deverá ter-se:

$$\begin{cases} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = k^2 \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k^2 \end{cases}$$

em que k^2 é a constante de separação, que é, genericamente, um número complexo. Assim, vem:

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} - k^2 X = 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + k^2 Y = 0 \end{cases}$$

Considere-se os casos em que $k^2 = 0$ e $k^2 \neq 0$ no seguimento,

usando exemplos ilustrativos.

Constante de separação nula ($\kappa^2=0$)

Por integração das equações anteriores, obtém-se directamente:

$$\begin{cases} X = Ax + B \\ Y = Cy + D \end{cases} \quad A, B, C, D: \text{constantes}$$

Donde:

$$\phi = a + bx + cy + dxy, \quad \text{sendo: } a = BD, b = AD, c = BC, d = AC.$$

O exemplo seguinte ilustra a aplicação a situações específicas.

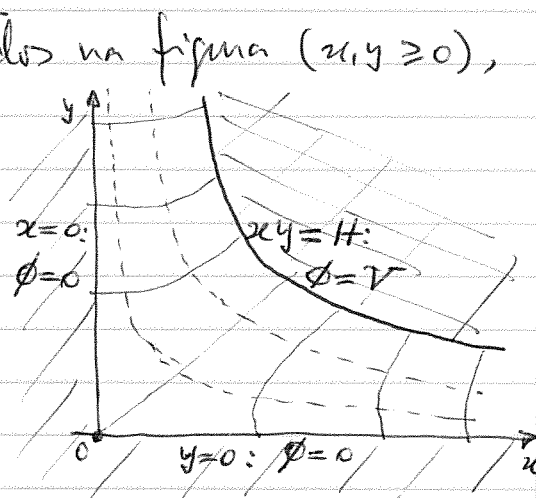
Electrodos hiperbólicos

Sejam os electrodos representados na figura ($x, y \geq 0$), aos potenciais especificados:

$$\begin{cases} x=0 : \phi=0 \\ y=0 : \phi=0 \\ xy=H \text{ constante} : \phi=V \end{cases}$$

Vem imediatamente que:

$$\begin{cases} a=b=c=0 \\ d = \frac{V}{H} \end{cases}$$



e então:
$$\phi(x, y) = \left(\frac{V}{H}\right) xy$$

As linhas equipotenciais são hiperbolas: $\phi/V = (1/H)xy$

O campo eléctrico vale: $\vec{E}(x, y) = -\nabla\phi = -\left(\frac{V}{H}\right)[y\hat{x} + x\hat{y}]$

As linhas de força de $\vec{E}$ são dadas pela equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} = \frac{x}{y}$$

de que resulta, integrando: $y^2 - x^2 = \text{constante}$.

A figura mostra as linhas equipotenciais e as linhas de força do campo eléctrico (que são normais aos electrodos e às linhas equipotenciais).

Constante de separação não-nula ($\kappa^2 \neq 0$)

Se $\kappa^2 \neq 0$, a solução será da forma seguinte, para κ real:

$$\begin{cases} X = A \sinh \kappa x + B \cosh \kappa x = A_1 e^{\kappa x} + B_1 e^{-\kappa x} \\ Y = C \sin \kappa y + D \cos \kappa y = C_1 e^{j\kappa y} + D_1 e^{-j\kappa y} \end{cases}$$

ou, para K imaginário, da forma:

$$\begin{cases} X = A \sin Kx + B \sinh Kx = A_1 e^{jKx} + B_1 e^{-jKx} \\ Y = C \sinh Ky + D \cosh Ky = C_1 e^{Ky} + D_1 e^{-Ky} \end{cases}$$

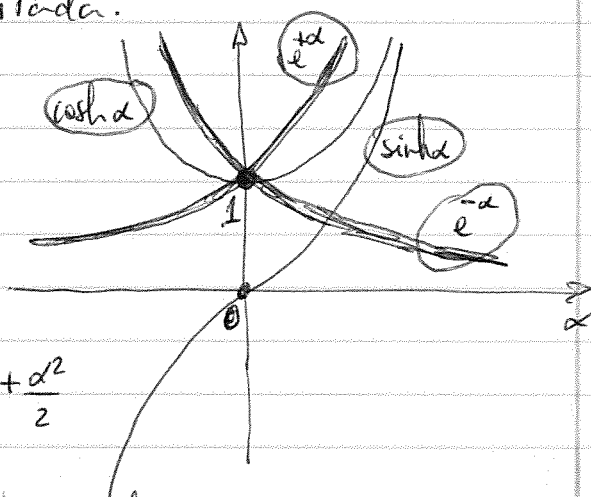
Dada a linearidade da equação de Laplace, soluções da forma analisada para $K^2 = 0$ tem como as soluções para $K^2 \neq 0$ com K real ou K imaginário acima explicitadas, podem ser sobpostas para obter soluções com forma mais geral. A escolha do tipo de solução conveniente depende do tipo de condições fronteira do problema. Por exemplo, no caso de extensões infinita do domínio de solução segundo x ou y , convém adoptar nessa coordenada uma solução do tipo exponencial decrescente; no caso de extensões finita do domínio de solução, as funções hiperbólicas são convenientes; numa situação de periodicidade segundo uma coordenada, soluções trigonométricas são a escolha ajustada.

$$\sinh \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}$$

$$\cosh \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sinh \alpha \approx \cosh \alpha \approx \frac{e^\alpha}{2}$$

$$\lim_{|\alpha| \ll 1} \sinh \alpha \approx \alpha \quad ; \quad \lim_{|\alpha| \ll 1} \cosh \alpha \approx 1 + \frac{\alpha^2}{2}$$

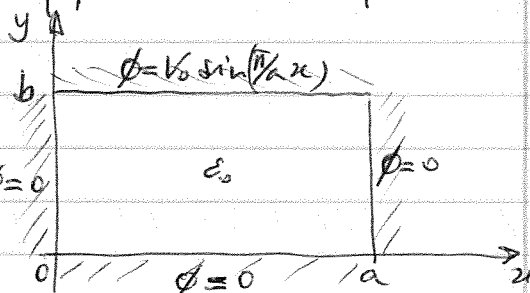


≡ Cavity de secção rectangular

Uma cavidade infinita segundo z e de secção rectangular ($a \times b$), como representado na figura, tem o potencial na face ($0 \leq x \leq a$, $y = b$) dado por $\phi = V_0 \sin(\frac{\pi}{a}x)$, sendo nulo nas outras faces.

A expressão geral para descrever o potencial na cavidade será:

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(k_n x) + b_n \sin(k_n x)] [c_n e^{k_n y} + d_n e^{-k_n y}]$$



atendendo à periodicidade das condições fronteira segundo x . Das condições fronteira resultam as seguintes equações nas constantes:

$$x = 0 \quad (\phi = 0) : a_n = 0$$

$$y=0 (\phi=0): \sum_n [b_n \sin(k_n x)] [C_n + d_n] = 0, \text{ donde } C_n = -d_n$$

$$x=a (\phi=0): \sum_n b_n C_n \sin(k_n a) [e^{k_n y} - e^{-k_n y}] = 0, \text{ donde } \sin(k_n a) = 0,$$

ou $x/a, k_n = n\pi/a$

$$y=b (\phi=V_0 \sin \frac{n\pi}{a} x): \sum_n b_n C_n \sin(n \frac{\pi}{a} x) [e^{n \frac{\pi}{a} y} - e^{-n \frac{\pi}{a} y}] = V_0 \sin \frac{n\pi}{a} x,$$

donde apenas o termo $n=1$
é não-nulo.

Assim, vem finalmente:

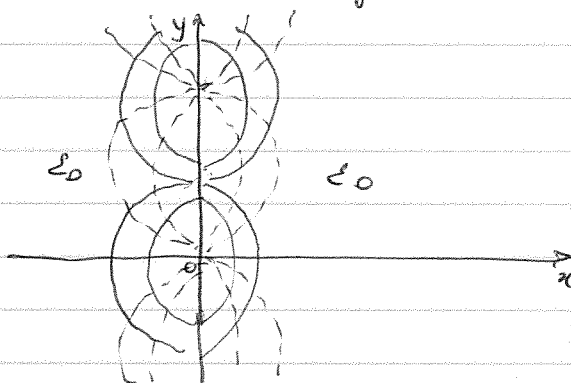
$$\phi(x, y) = \frac{V_0}{\sinh(\pi b/a)} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sinh\left(\frac{\pi}{a} y\right)$$

O campo eléctrico pode calcular-se facilmente: $\vec{E} = -\nabla\phi$.

= Electrodo plano com potencial periódico

O potencial no electrodo plano $x=0$ varia segundo $\phi(0, y) = V \sin(ay)$. Atendendo a que deve ser verificada esta condição fronteira periódica em $x=0$ e que o campo eléctrico deve ser finito para $x \rightarrow \pm\infty$, vem ($k=a$):

$$\phi(x, y) = \begin{cases} V \sin(ay) e^{-ax}, & x \geq 0 \\ V \sin(ay) e^{+ax}, & x \leq 0 \end{cases}$$



$$\vec{E}(x, y) = \begin{cases} -Va e^{-ax} (-\sin(ay) \hat{x} + \cos(ay) \hat{y}), & x > 0 \\ -Va e^{+ax} (\sin(ay) \hat{x} + \cos(ay) \hat{y}), & x < 0 \end{cases}$$

A equação das linhas de força de $\vec{E}$ escreve-se: $\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} = -\cot(ay)$
donde, integrando:

$$\cos ay e^{\mp ax} = \text{constante} \quad (\text{sinus } \mp \text{ para } x \geq 0)$$

Em consonância com a descontinuidade de $\epsilon_0 \vec{E}$ em $x=0$, existe uma distribuição superficial de carga nesse plano de densidade

$$\sigma_s(0, y) = \epsilon_0 [E_x(0^+) - E_x(0^-)] = 2\epsilon_0 Va \sin(ay)$$

= Electrodo em forma de U

Seja a configuração representada na figura, com electrodo estendendo-se para infinito em $y=0$, e ao potencial nulo, e um electrodo em $x=0$ ao potencial V .

Intensa usar uma função periódica segundo yy , com

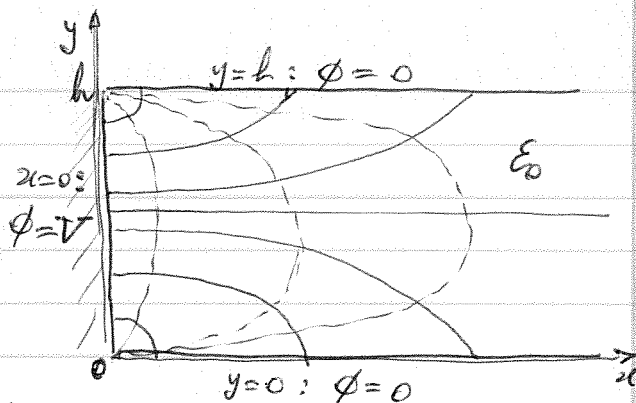
zeros em $y=0, h$, ou seja,
sendo p um inteiro ímpar:

$$a_p \sin\left(p \frac{2\pi}{2h} y\right)$$

Donde: $k = p \frac{\pi}{h}$

Segundo o eixo x , a solução
deve manter-se finita para $x \rightarrow \infty$,

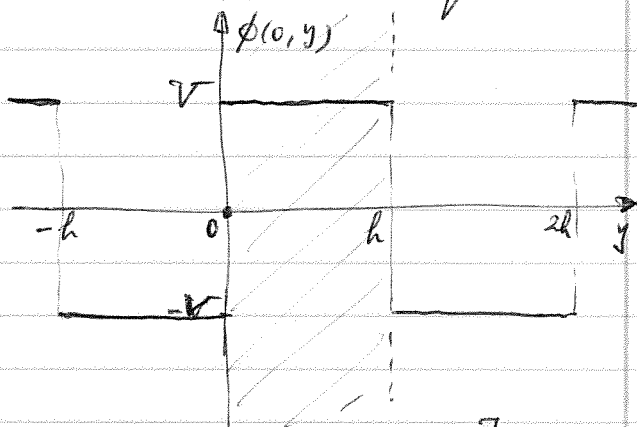
donde será do tipo e^{-kx} . Assim, uma solução elementar
será da forma: $a_p \sin\left(p \frac{\pi}{h} y\right) e^{-p \frac{\pi}{h} x}$



Contudo, esta solução não verifica a condição fronteira em $x=0$
($\phi=V$); mas uma sobreposição de soluções elementares satisfaz
essa condição fronteira, como se mostra de seguida.

Pode ser construída uma função
periódica quadrada $\phi(0, y)$, como
se indica na figura, coincidente
com o potencial na fronteira
na região de interesse ($0 \leq y \leq h$).

A função periódica exprime-se
pela respetiva série de Fourier
(Apêndice...):



$$\phi(0, y) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{l} y\right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{l} y\right) \right]$$

Neste caso, será $l=2h$, e os coeficientes da série valerão

$$\begin{cases} a_n = 0 \\ b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \left(\frac{4V}{\pi}\right) \frac{1}{n}, & n \text{ ímpar} \end{cases} \end{cases}$$

Donde: $\phi(0, y) = \left(\frac{4V}{\pi}\right) \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(n \frac{\pi}{h} y\right)$

Assim, sobrepondo as soluções elementares encontradas, vem:

$$\phi(x, y) = \left(\frac{4V}{\pi}\right) \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(n \frac{\pi}{h} y\right) e^{-\left(n \frac{\pi}{h} x\right)}$$

O campo eléctrico correspondente é dado por

$$\vec{E}(x, y) = -\left(\frac{4V}{h}\right) \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \left[-\sin\left(n \frac{\pi}{h} y\right) \hat{x} + \cos\left(n \frac{\pi}{h} y\right) \hat{y} \right] e^{-\left(n \frac{\pi}{h} x\right)}$$

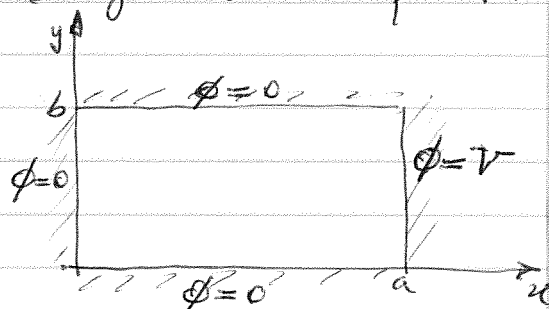
As linhas de força de $\vec{E}$ e as equipotenciais encontram-se na figura.

A sobreposição linear de soluções elementares
da equação de Laplace é ainda solução da equação de Laplace

$\phi(x, y)$ pode ser escrito como
 $\phi(x, y) = \frac{2V}{\pi} \tan^{-1} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi y}{h}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi x}{h}\right)} \right]$
o que permite
verificar a condição
de Laplace + c. fronteira

— Caverna de seção retangular

Considere-nos novamente uma caverna de seção retangular, com três faces ao potencial nulo, mas agora com a quarta face ao potencial constante V , como mostra a figura. A solução pode ser obtida por sobreposição de soluções elementares, cujas dependências em x e y deverão ser:



- funções trigonométricas segundo y da forma $\sin(ky)$ de modo a verificar a periodicidade das condições fronteira e sendo $\phi(y=0)=0$.
- funções hiperbólicas segundo x da forma $\sinh(kx)$, de modo a verificar simultaneamente $\phi(x=0)=0$ e $\phi(x=a)=V$.

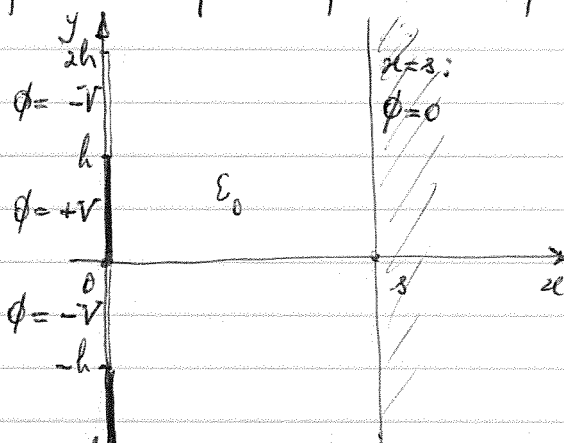
Assim:

$$\phi(x,y) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n \text{ ímpar}} \left(\frac{1}{n} \right) \frac{\sinh\left(n \frac{\pi}{b} x\right)}{\sinh\left(n \frac{\pi}{b} a\right)} \sin\left(n \frac{\pi}{b} y\right)$$

Esta série converge rapidamente, excepto para se próximo a. (A relevância dos termos do somatório diminui com o aumento da ordem n).

— Electrodo com potencial periódico paralelo a electrodo a potencial constante

Um electrodo infinitamente extenso, situado no plano $x=0$ e em que o potencial é descrito por uma função periódica quadrada $\phi(x=0,y)=\pm V$ de período $2h$, está alinhado paralelamente a um electrodo plano colocado em $x=s$, encontrando-se ao potencial nulo. Segundo x , interessa uma solução da forma $X(x) = X_0 \sinh(kx + \alpha_x)$ pois a função $\sinh$ apresenta um zero, ao contrário da função $\cosh$.



Atendendo ao resultado anterior para $-2h$ o potencial periódico quadrado $\phi(x=0,y)$, deverá convergir a função $Y(y)$ como

$$Y(y) = \left[\left(\frac{4V}{\pi} \right) \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(n \frac{\pi}{h} y\right) \right] / \left[X_0 \sinh \alpha_n \right]$$

sendo $k_n = n\pi/h$. Atendendo à fronteira $x=s$, deverá ter-se $X=0$, donde:

$$\sinh\left(n \frac{\pi}{h} s + \alpha_n\right) = 0, \text{ ou seja, } \alpha_n = -n \frac{\pi}{h} s.$$

3.24a

Cavidade de seção retangular

Considere-se uma cavidade delimitada segundo zz , com a geometria e potenciais nas fronteiras indicados na figura (duas faces com potencial nulo, duas faces opostas com potencial V).

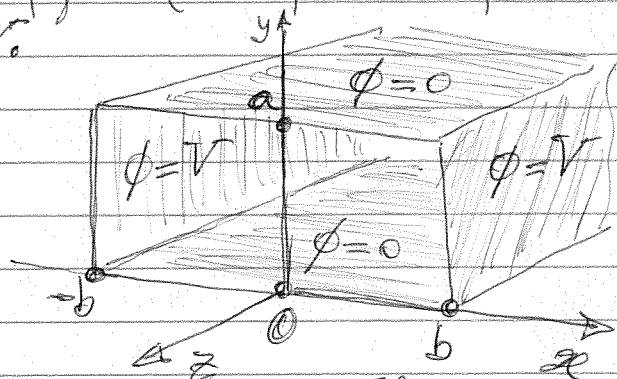
O potencial só depende de x, y : $\phi(x, y)$.

Verifica-se a equação de Laplace 2D:

$$\partial^2 \phi / \partial x^2 + \partial^2 \phi / \partial y^2 = 0. \text{ As condições}$$

fronteira escrevem-se:

$$\begin{cases} \phi = 0 & \text{em } y = 0, a \\ \phi = V & \text{em } x = -b, +b \end{cases}$$



A solução elementar será da forma: $\phi(x, y) = [A e^{Kx} + B e^{-Kx}] [C \sin Ky + D \cos Ky]$

Notando a simetria $\phi(-x, y) = \phi(x, y)$, resulta: $A = B$.

Atendendo a que $\phi(x, y=0) = 0$, resulta: $D = 0$. Como $\phi(x, y=a) = 0$, então: $K = n\pi/a$. Assim, a solução elementar será:

$$\phi_n(x, y) = C_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

Sendo $\phi_n(x, y)$ uma função par em x , basta verificar numa fronteira a função $\phi(x, y)$ obtida por sobreposição:

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

$$\phi(x=\pm b, y) = V : \phi(b, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) = V$$

Resulta:

$$C_n \cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ 4V/n\pi, & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Donde:

$$\phi(x, y) = \frac{4V}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{\cosh\left(\frac{n\pi}{a}x\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}\right) \left(\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\right)$$

Para que $\phi(x=0, y) = \pm V$, deverá ser

$$X_0 \sinh \alpha_x = -X_0 \sinh\left(n \frac{\pi}{h} s\right) = 1$$

Resulta, finalmente:

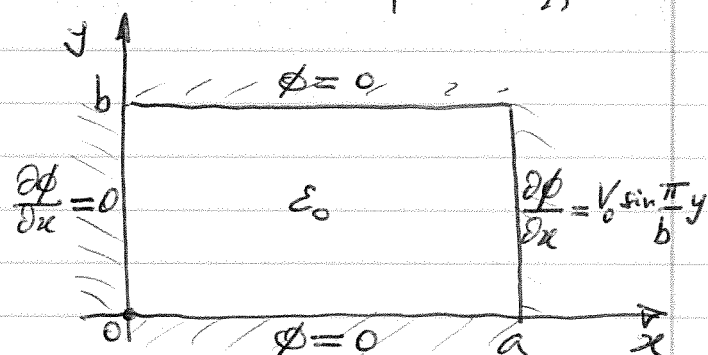
$$\phi(u, y) = \frac{4V}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \sin\left(n \frac{\pi}{h} y\right) \frac{\sinh\left[n \frac{\pi}{h} (s-u)\right]}{\sinh\left[n \frac{\pi}{h} s\right]}$$

Cavidade de secção rectangular: condições fronteira no potencial e no campo eléctrico

Considera-se, novamente, uma cavidade de secção rectangular $a \times b$, mas agora com condições fronteira mistas, no potencial e no campo eléctrico (ou seja, na derivada normal do potencial), sendo:

- potencial nulo em $y=0, b$
- campo nulo em $x=0$ e valendo $-V_0 \sin(\pi/b y)$ em $x=a$.

Atendendo à periodicidade das condições fronteira segundo y , a expressão geral do potencial será:



$$\phi(u, y) = \sum_n \left[a_n \cos k_n y + b_n \sin k_n y \right] \left[c_n e^{+k_n x} + d_n e^{-k_n x} \right]$$

Atendendo às condições fronteira em $y=0, b$:

$$y=0 (\phi=0): a_n=0$$

$$y=b (\phi=0): \sum_n b_n \sin(k_n b) \left[c_n e^{+k_n x} + d_n e^{-k_n x} \right] = 0$$

donde: $\sin(k_n b) = 0$, ou seja: $k_n = n\pi/b$

Assim, a função potencial e a sua derivada $\partial\phi/\partial x$ serão:

$$\left[\begin{aligned} \phi(u, y) &= \sum_n b_n \sin\left(n \frac{\pi}{b} y\right) \left[c_n e^{n\pi/b x} + d_n e^{-n\pi/b x} \right] \\ \frac{\partial\phi}{\partial x}(u, y) &= \sum_n \left(n \frac{\pi}{b}\right) b_n \sin\left(n \frac{\pi}{b} y\right) \left[c_n e^{n\pi/b x} - d_n e^{-n\pi/b x} \right] \end{aligned} \right.$$

Considerando agora as fronteiras em $x=0, a$:

$$x=0 (\partial\phi/\partial x=0): \sum_n \left(n \frac{\pi}{b}\right) b_n \sin\left(n \frac{\pi}{b} y\right) (c_n - d_n) = 0, \text{ donde } c_n = d_n$$

$$x=a (\partial\phi/\partial x = V_0 \sin(\pi/b y)): \text{conclui-se imediatamente que apenas o termo } n=1 \text{ é não-nulo, sendo ainda } \left(\frac{\pi}{b}\right) b_1 c_1 \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \left[e^{+\pi/b a} - e^{-\pi/b a} \right] = V_0 \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right)$$

Resulta, portanto:

$$\phi(u, y) = \left(\frac{V_0 b}{\pi}\right) \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \frac{e^{+\pi/b x} + e^{-\pi/b x}}{e^{+\pi/b a} - e^{-\pi/b a}}$$

ou seja: $\phi(x, y) = \left[\frac{V_0 b}{\pi \sinh(\frac{\pi}{b} a)} \right] \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \cosh\left(\frac{\pi}{b} x\right)$

3.2.2. Distribuição tridimensional do potencial

De forma análoga à situações bidimensional acima exemplificada, no caso tridimensional o potencial estende-se, separando variáveis, como $\phi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z)$, o que, quando, por substituição na equação de Laplace $\nabla^2 \phi = 0$, a:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

Sendos cada termo apenas dependente da respectiva coordenada, e a equação válida para (x, y, z) arbitrários no domínio de interesse entre os eletrodos, deve verificar-se

$$\frac{d^2(X, Y, Z)}{d(x^2, y^2, z^2)} - (k_x^2, k_y^2, k_z^2)(X, Y, Z) = 0$$

sendo (k_x, k_y, k_z) constantes de separação tais que $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$. Se essas constantes forem todas nulas, resultarão funções da forma $(X, Y, Z) = A(x, y, z) + B$, em que A, B são constantes. No caso de constantes não-nulas, poderá ter-se duas constantes reais e uma imaginária, ou uma constante real e duas imaginárias; fixadas duas das constantes, a terceira resulta directamente da equação acima. Assim, pelo menos uma das funções (X, Y, Z) será do tipo trigonométrico, e outra do tipo hiperbólico. A função potencial $\phi(x, y, z)$ pode ser obtida como sobreposição de funções elementares, tal como exemplificado a duas dimensões. Por exemplo, para soluções periódicas segundo xx e yy , terá:

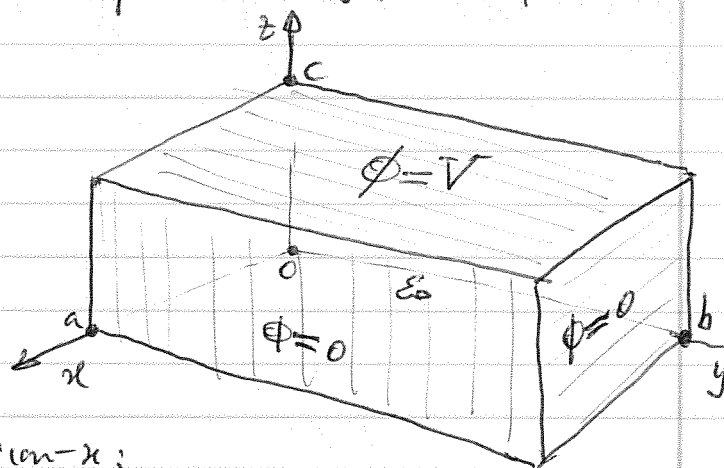
$$\phi(x, y, z) = \sum_{k_x, k_y} \left[A_{k_x, k_y} \sinh k_x x + B_{k_x, k_y} \cosh k_x x \right] \left[C_{k_x, k_y} \sinh k_y y + D_{k_x, k_y} \cosh k_y y \right] \times \left[E_{k_x, k_y} e^{+\sqrt{k_x^2 + k_y^2} z} + F_{k_x, k_y} e^{-\sqrt{k_x^2 + k_y^2} z} \right]$$

— Cavidade paralelepipedica

As fronteiras de uma cavidade paralelepipedica $(a \times b \times c)$ são faces condutoras ideais colocadas ao potencial nulo, excepto a face situada em $z=c$ em que o potencial é $V(x, y)$. Tomando um sistema de eixos coordenados de acordo com as arestas da cavidade, como ilustra a figura, a função potencial na cavidade deverá exprimir-se como sobreposição de soluções

elementares trigonométricas ($\sin$) segundo x e y , e hiperbólicas ($\sinh$) segundo z , dadas as condições fronteira:

$$\phi = \sum_{m,n} \phi_{mn} = \sum_{m,n} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) * \sinh\left[\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} z\right]$$



Na fronteira $z=c$ deverá verificar-se:

$$\phi(x,y,c) = \sum_{m,n} B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = V(x,y)$$

sendo $B_{mn} = A_{mn} \sinh\left[\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} c\right]$. É evidente que B_{mn} não é senão o coeficiente da série de Fourier bidimensional que exprime uma função periódica coincidente com $V(x,y)$ na região $[0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b]$, e que se calcula como:

$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b V(x,y) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dx dy$$

No caso particular em que $V(x,y) = V_0$ constante, tem-se $B_{mn} = (16V_0)/(\pi^2 mn)$ para m e n ímpares, e $B_{mn} = 0$ nos outros casos. Resulta daí, neste caso:

$$\phi(x,y) = \frac{16V_0}{\pi^2} \sum_{\substack{m,n \\ m,n \text{ ímpares}}} \left(\frac{1}{mn}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) * \frac{\sinh\left[\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} z\right]}{\sinh\left[\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} c\right]}$$

$(0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c)$

A relevância dos termos do somatório duplo diminui rapidamente com a sua ordem (m,n) crescente.

3.2. Método de separação de variáveis: coordenadas cilíndricas

A equação de Laplace $\nabla^2 \phi = 0$ escreve-se, em coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) , como

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

procurando-se soluções separáveis da forma $\phi(\rho, \phi, z) = \mathcal{P}(\rho) \Phi(\phi) Z(z)$. A solução de problemas independentes de z é de abordagem mais simples, sendo objeto da próxima secção.

3.2.1. Distribuições de potencial independentes de z

Em problemas formulados em coordenadas cilíndricas

em que se verifica invariância na coordenada z , a solução por separação de variáveis será da forma

$$\phi(\rho, \phi) = \varrho(\rho) \Phi(\phi)$$

de que resulta, após substituições na equação de Laplace em coordenadas cilíndricas

$$\frac{\Phi}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\varrho}{d\rho} \right) + \frac{\varrho}{\rho^2} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0$$

Multiplicando a equação por $\rho^2/(\varrho\Phi)$, obtêm-se as equações separadas

$$\begin{cases} \frac{\rho}{\varrho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\varrho}{d\rho} \right) = n^2 \\ \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -n^2 \end{cases}$$

A solução Φ é imediata:

$$\Phi(\phi) = \begin{cases} A \sin n\phi + B \cos n\phi, & n \neq 0 \\ C\phi + D, & n = 0 \end{cases}$$

Tentando uma solução $\varrho(\rho)$ proporcional a ρ^p , resulta $p = \pm n$, dando as soluções

$$\varrho(\rho) = \begin{cases} E \rho^n + F \rho^{-n}, & n \neq 0 \\ G \ln \rho + H, & n = 0 \end{cases}$$

Dada a periodicidade do domínio de soluções em $\phi \in (0, 2\pi]$, n deve ser inteiro.

— Elétrodos planos em anula

Dois elétrodos planos, formando entre si um ângulo α , estão aos potenciais zero e V , no vácuo. A configuração das condições fronteira segue uma solução independente de ρ , da forma ($n=0$):

$$\phi = a\phi + b$$

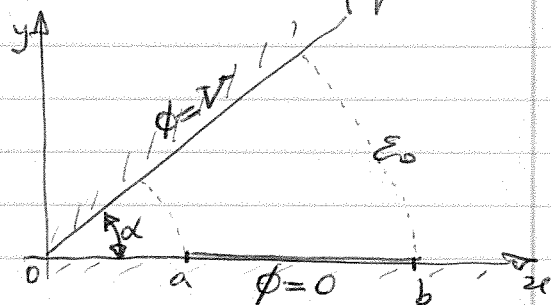
Dessas condições fronteira resulta:

$$\begin{cases} \phi(0) = b = 0 \\ \phi(\alpha) = a\alpha + b = V \end{cases}$$

donde $a = V/\alpha$. Além, tem-se: $\phi(\phi) = (V/\alpha)\phi$ e o campo elétrico $\vec{E} = E(\rho)\hat{\phi}$, sendo

$$E(\rho) = -\frac{1}{\rho} \frac{d\phi}{d\phi} = -\frac{V}{\alpha\rho}$$

A carga elétrica numa extensão $\rho \in [a, b]$ na superfície dos elétrodos, por unidade de comprimento axial z , vale



$$q_L = \int_a^b \sigma_s(\rho, \alpha) d\rho = \int_a^b -\epsilon_0 E(\rho) d\rho = \frac{\epsilon_0 V}{d} \ln \frac{b}{a}$$

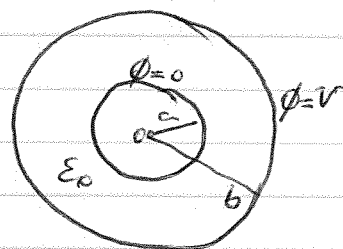
Condutores cilíndricos coaxiais

Dois superfícies cilíndricas condutoras coaxiais, de raios a, b ($b > a$) encontram-se aos potenciais $\phi(b) = V$ e $\phi(a) = 0$, no vácuo. A solução genérica para o problema do potencial na região $a \leq \rho \leq b$ deverá ser independente de ϕ , pelo que terá a forma

$$\phi(\rho) = A + B \ln \rho$$

Seja: $\begin{cases} \rho = a : \phi = 0 \\ \rho = b : \phi = V \end{cases}$ vem: $\begin{cases} A + B \ln a = 0 \\ A + B \ln b = V \end{cases}$

donde resulta: $\phi(\rho) = \frac{V}{\ln(b/a)} \ln\left(\frac{\rho}{a}\right) \quad (a \leq \rho \leq b)$



O campo eléctrico é radial, $\vec{E} = E(\rho) \hat{\rho}$, com

$$E(\rho) = - \frac{V}{\ln(b/a)} \cdot \frac{1}{\rho}$$

Daquí resultam as densidades superficiais de carga

$$\sigma_s(\rho = a, b) = \mp \epsilon_0 \frac{V}{\ln(b/a)} \cdot \frac{1}{a, b}$$

No caso mais geral em que $\phi(a) = 0$ mas $\phi(b) = V \cos \phi$, a forma do potencial $\phi(\rho, \phi)$ será:

$$\phi(\rho, \phi) = A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \rho^n + B_n \rho^{-n}] [C_n \cos n\phi + D_n \sin n\phi]$$

Considerar, separadamente, três regiões para a solução:

$0 \leq \rho \leq a$: $\begin{cases} \rho = 0 : \phi \text{ deve ser finito} \\ \rho = a : \begin{cases} \phi \text{ independente de } \phi : C_n = D_n = 0 \\ \phi(a) = 0 : A_0 = 0 \end{cases} \end{cases}$

Assim: $\phi(\rho, \phi) = 0 \quad (0 \leq \rho \leq a)$

$a \leq \rho \leq b$: $\rho = b : \phi = V \cos \phi$, resultando em $\begin{cases} C_n = 0, n > 1 \\ A_0 = B_0 = D_n = 0 \end{cases}$

donde deverá ser: $\phi(\rho, \phi) = \left(A\rho + \frac{B}{\rho} \right) \cos \phi$.

Atendendo às duas fronteiras:

$$\rho = a : \left(Aa + \frac{B}{a} \right) \cos \phi = 0$$

$$\rho = b : \left(Ab + \frac{B}{b} \right) \cos \phi = V \cos \phi$$

resulta, resolvendo:

$$\phi(\rho, \phi) = \left(\frac{a^2 b}{a^2 - b^2} \right) V \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\rho}{a^2} \right) \cos \phi \quad (a \leq \rho \leq b)$$

$b \leq \rho$: Atendendo a que $\phi(\rho \rightarrow \infty) = 0$, e à dependência em $\cos \phi$ do potencial em $\rho = b$, vem:

$$\begin{cases} A_0 = B_0 = 0 \\ B_n = C_n = 0, \quad n > 1 \\ A_n = D_n = 0 \end{cases}$$

donde: $\phi(\rho, \phi) = \frac{B}{\rho} \cos \phi$

Atendendo à condição fronteira em $\rho = b$, tem-se $(B/b) \cos \phi = V \cos \phi$, e vem:

$$\phi(\rho, \phi) = V \frac{b}{\rho} \cos \phi \quad (b \leq \rho).$$

3.8.2. Distribuição de potencial dependente de z

Nesta situação geral, o potencial escreve-se como

$$\phi(\rho, \phi, z) = \mathcal{Q}(\rho) \Phi(\phi) \mathcal{Z}(z)$$

resultando, por substituição na equação de Laplace e após dividir por $\mathcal{Q}\Phi\mathcal{Z}$:

$$\frac{1}{\mathcal{Q}} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\mathcal{Q}}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{d^2 \mathcal{Z}}{dz^2} = 0$$

Como os dois primeiros termos dependem de ρ e ϕ , o último depende apenas de z , donde se pode escrever, por separação de constantes:

$$\frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{d^2 \mathcal{Z}}{dz^2} = k^2$$

resultando em:

$$\mathcal{Z}(z) = \begin{cases} A \sinh kz + B \cosh kz, & k \neq 0 \\ Cz + D, & k = 0 \end{cases}$$

Note-se que, para $k^2 < 0$, k é imaginário, e resulta ($k = jk_1$):

$$\begin{cases} \cosh(jk_1) = \cos(k_1) \\ \sinh(jk_1) = -j \sin(k_1) \end{cases}$$

A soma dos dois primeiros termos da equação de Laplace acima escrita vale $-k^2$; multiplicando essa soma por ρ^2 , vem:

$$\left[\frac{\rho}{\mathcal{Q}} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\mathcal{Q}}{d\rho} \right) + k^2 \rho^2 \right] + \left[\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} \right] = 0$$

em que cada parêntese depende de uma única coordenada (ρ ou ϕ). Assim, deve verificar-se nova separação de constantes:

$$\begin{cases} \frac{\rho}{\mathcal{Q}} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\mathcal{Q}}{d\rho} \right) + k^2 \rho^2 = n^2 \\ \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -n^2 \end{cases}$$

Integrando a equação em ϕ :

$$\Phi(\phi) = \begin{cases} E \sin n\phi + F \cos n\phi, & n \neq 0 \\ G\phi + H, & n = 0 \end{cases}$$

Dada a periodicidade de 2π segundo ϕ a função deve satisfazer a solução, n deverá ser inteiro. A dependência em ρ é expressa pela equação diferencial de Bessel:

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\eta}{d\rho} \right) + (k^2 \rho^2 - n^2) \eta = 0$$

que tem como solução

$$\eta(\rho) = \begin{cases} P J_n(k\rho) + Q Y_n(k\rho), & k \neq 0 \\ R \rho^n + S \rho^{-n}, & k=0 \text{ e } n \neq 0 \\ T \ln \rho + U, & k=0 \text{ e } n=0 \end{cases}$$

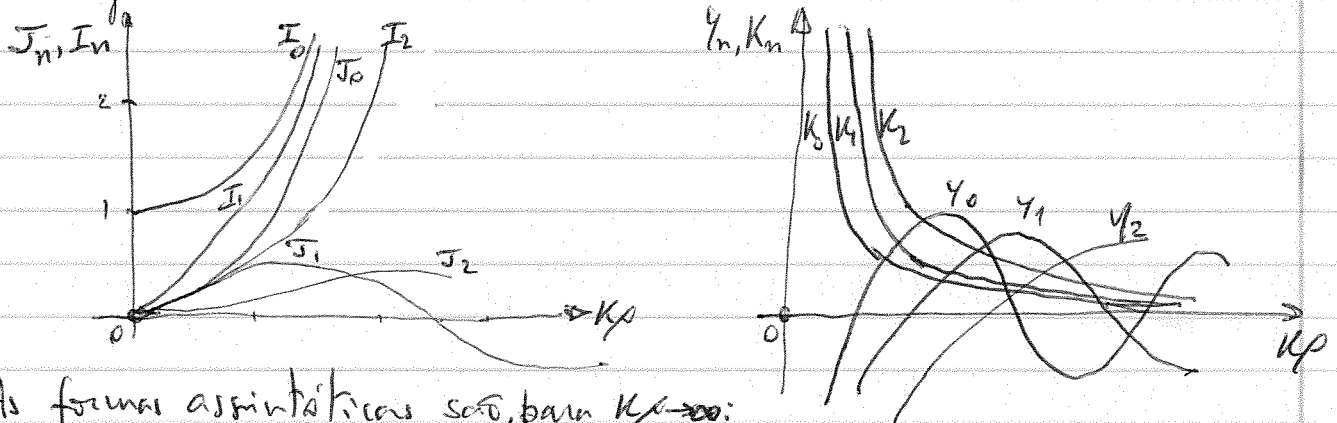
sendo: J_n : função de Bessel do 1º tipo, ordem n

Y_n : função de Bessel do 2º tipo, ordem n

Para $k^2 < 0$, é útil recorrer-se às funções de Bessel modificadas de argumento real:

$$\begin{cases} I_n(k\rho) = j^{-n} J_n(jk\rho) \\ K_n(k\rho) = \frac{\pi}{2} j^{n+1} \left[J_n(jk\rho) + j Y_n(jk\rho) \right] \end{cases}$$

A figura mostra os gráficos correspondentes a algumas destas funções, sugerindo os comportamentos assintóticos para $\rho \rightarrow 0$ e $\rho \rightarrow \infty$, úteis na seleção das soluções adequadas em problemas incluindo o eixo zz ($k\rho=0$; as funções K_n são divergentes) ou fronteiras no infinito ($k\rho \rightarrow \infty$; as funções I_n são divergentes).



As formas assintóticas são, para $k\rho \rightarrow \infty$:

$$J_n(k\rho) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} \cos(k\rho - \pi/4 - n\pi/2)$$

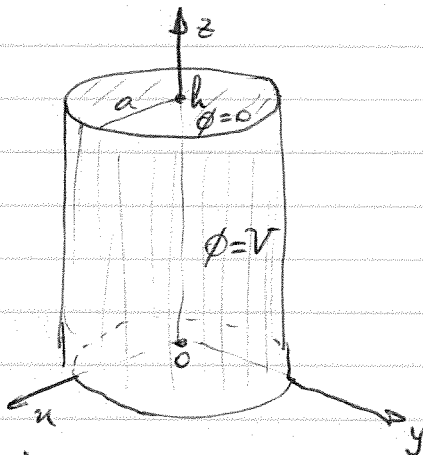
$$Y_n(k\rho) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} \sin(k\rho - \pi/4 - n\pi/2)$$

$$I_n(k\rho) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi k\rho}} e^{k\rho}$$

$$K_n(k\rho) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi k\rho}} e^{-k\rho}$$

— Caverna cilíndrica

Uma caverna cilíndrica (altura h , raio das bases a) de paredes condutoras ideais tem o seu eixo segundo zz , existindo vácuo no seu interior. O potencial nas bases é nulo, e o potencial na superfície cilíndrica é $\phi = V$.



Dada a periodicidade do potencial segundo z , a solução segundo esta coordenada deverá ser sinusoidal (ou seja, $k^2 < 0$). Assim, a dependência radial deve recorrer a funções de Bessel modificadas, I_n e K_n ; todavia, como as funções K_n divergem para $\rho = 0$, são excluídas da solução. Dada a simetria axial em zz , deverá ter $n=0$. Uma solução elementar será, portanto, da forma:

$$\phi_m = A_m I_0\left(m \frac{\pi}{h} \rho\right) \sin\left(m \frac{\pi}{h} z\right)$$

e a solução do problema que assegure um potencial constante ao longo da superfície cilíndrica será

$$\phi(\rho, z) = \frac{4V}{\pi} \sum_{\substack{m \\ \text{ímpar}}} \frac{1}{m} \frac{I_0\left(m \frac{\pi}{h} \rho\right)}{I_0\left(m \frac{\pi}{h} a\right)} \sin\left(m \frac{\pi}{h} z\right) \quad \begin{pmatrix} 0 \leq \rho \leq a \\ 0 \leq z \leq h \end{pmatrix}$$

Se o potencial for nulo numa base e na superfície cilíndrica ($\phi(z=0) = \phi(\rho=a) = 0$), sendo constante (V) na base $z=h$, a dependência em z é não-periódica ($k^2 > 0$). Dado o potencial nulo em $z=0$, a solução será em termos de funções sinh. A descrição radial será, assim, em termos de funções de Bessel J_n e Y_n ; como Y_n divergem para $\rho=0$, são excluídas. Não existindo dependência em ϕ , será $n=0$. Assim, a solução será da forma:

$$\phi(\rho, z) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m J_0\left(K_m \frac{\rho}{a}\right) \sinh(K_m z)$$

em que K_m é a raíz de ordem m de $J_0(K) = 0$ (as primeiras raízes são $K_1 \approx 2.4$, $K_2 \approx 5.5$, $K_3 \approx 8.7$, $K_4 \approx 11.8$). Para que $\phi(\rho, z=h) = V$, é necessário determinar os coeficientes da expansão de Bessel (ver Apêndio...) da função

$$\phi(\rho, h) = \begin{cases} V & , 0 \leq \rho \leq a \\ 0 & , \text{outros valores de } \rho \end{cases}$$

Usando propriedades de integrais, de funções de Bessel, vem:

$$B_m = \frac{2}{a^2 J_1^2(k_m)} \int_0^a \rho V J_0(k_m \frac{\rho}{a}) d\rho = \frac{2V}{k_m J_1(k_m)}$$

Resulta, finalmente:

$$\phi(\rho, z) = 2V \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k_m J_1(k_m) \sinh(k_m \frac{h}{a})} \sinh(k_m \frac{z}{h}) J_0(k_m \frac{\rho}{a})$$

($0 \leq \rho \leq a$
 $0 \leq z \leq h$)

3.8. Método de separação de variáveis: coordenadas esféricas

Em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , a equação de Laplace escreve-se

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} = 0$$

procurando-se soluções da forma $R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi)$.

3.8.1. Distribuições de potencial unidimensionais

Em problemas em que o potencial depende de uma única coordenada esférica, resulta:

$$\begin{cases} \phi = \phi(r): & \frac{d}{dr} (r^2 \frac{d\phi}{dr}) = 0, \text{ donde: } \phi(r) = \frac{A}{r} + B \\ \phi = \phi(\theta): & \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{d\phi}{d\theta}) = 0, \text{ donde: } \phi(\theta) = C \ln(\tan \frac{\theta}{2}) + D \\ \phi = \phi(\phi): & \frac{d^2 \phi}{d\phi^2} = 0, \text{ donde: } \phi(\phi) = E\phi + F \end{cases}$$

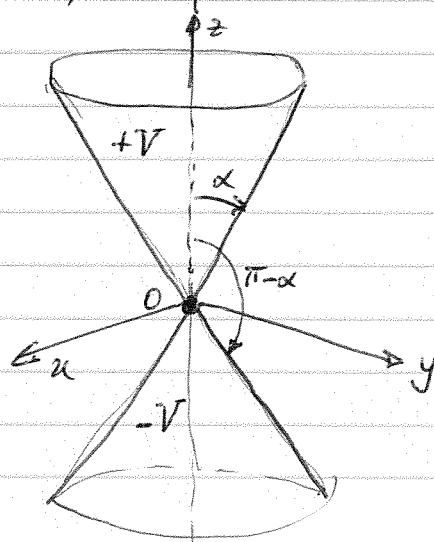
(A, ..., F: constantes).

— Eléctrodos cônicos

Considera-se dois eléctrodos cônicos de semi-abertura α , com vértices na origem e eixos segundo z , aos potenciais $\pm V$, como ilustra a figura. Como as condições fronteiras são independentes de r e ϕ , escreve-se a solução tentativa: $\phi(\theta) = a \ln[\tan(\frac{\theta}{2})] + b$

Nas fronteiras: $\begin{cases} \phi = \alpha : & \phi = +V \\ \phi = \pi - \alpha : & \phi = -V \end{cases}$

donde: $a = V \frac{1}{\ln[\tan(\frac{\alpha}{2})]}$; $b = 0$

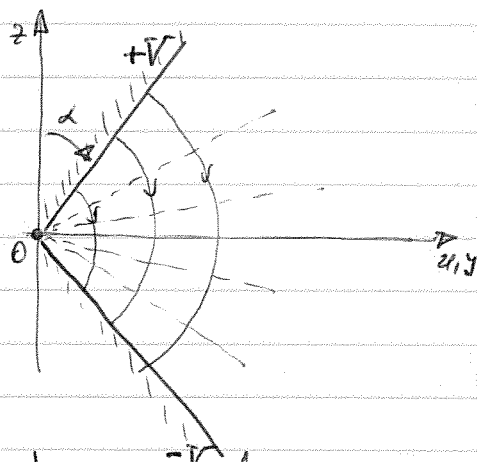


Resulta uma distribuição de potencial, com superfícies equipotenciais cônicas, dada por

$$\phi(\theta) = V \frac{\ln[\tan(\theta/2)]}{\ln[\tan(\alpha/2)]}$$

e o campo eléctrico

$$\vec{E}(r, \theta) = -V \frac{1}{2r \sin \theta \ln[\tan(\alpha/2)]} \hat{\theta}$$



3.8.2. Distribuições de potencial com simetria axial

Considere-se, agora, distribuições de potencial independentes da coordenada ϕ , da forma $\phi(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$. Substituindo na equação de Laplace em coordenadas esféricas e multiplicando por $r^2/R\Theta$, resulta:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = 0$$

Usando uma constante de separação da forma $n(n+1)$, vem:

$$\begin{cases} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - n(n+1) R = 0 \\ \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + n(n+1) \Theta \sin \theta = 0 \end{cases}$$

Experimentando uma solução $R = ar^p$, tal exige que $p(p+1) = n(n+1)$, o que se verifica para: $\begin{cases} p = n \\ p = -(n+1) \end{cases}$

Assim: $R(r) = a_n r^n + b_n r^{-(n+1)}$

Quanto a $\Theta(\theta)$, fazendo $x = \cos \theta$, vem:

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{d\Theta}{dx} \cdot \frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta \frac{d\Theta}{dx} = -(1-x^2)^{1/2} \frac{d\Theta}{dx}$$

e resulta a equação diferencial de Legendre na variável independente $x = \cos \theta$:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right] + n(n+1) \Theta = 0$$

Se n inteiro, a solução exprime-se nos polinómios de Legendre do 1.º e 2.º tipos:

$$\Phi(\theta) = c_n P_n(\cos\theta) + d_n Q_n(\cos\theta)$$

Note-se que Q_n diverge para $\alpha = \pm 1$ (ou seja, $\theta = 0, \pi$), o que elimina a sua contribuição para a solução geral do potencial sempre que o domínio de solução inclua $\theta = 0, \pi$. Nesse caso, a solução geral será da forma

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n r^n + b_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos\theta)$$

A tabela fornece as expressões de P_n e Q_n para os primeiros valores de n , e no gráfico foram representadas $P_0 - P_3$.

n	$P_n(\alpha)$	$Q_n(\alpha)$
0	1	$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right)$
1	α	$\frac{1}{2} \alpha \ln \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right) - 1$
2	$\frac{1}{2} (3\alpha^2 - 1)$	$\frac{1}{4} (3\alpha^2 - 1) \ln \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right) - \frac{3\alpha}{2}$
3	$\frac{1}{2} (5\alpha^3 - 3\alpha)$	$\frac{1}{4} (5\alpha^3 - 3\alpha) \ln \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right) - \frac{5}{2} \alpha^2 + \frac{2}{3}$

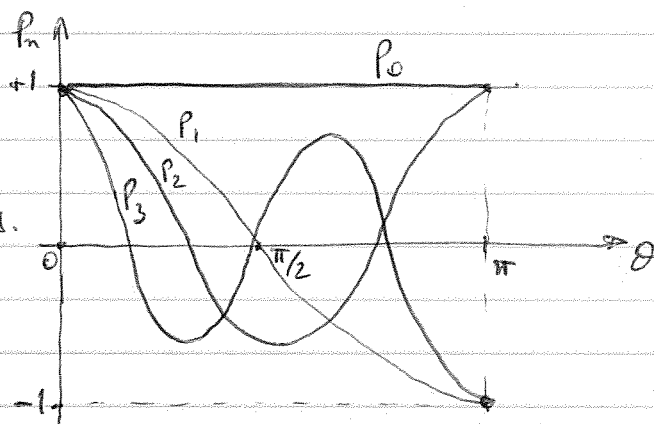
$$\left[\begin{aligned} P_4(\alpha) &= \frac{1}{8} (35\alpha^4 - 30\alpha^2 + 3) \\ P_5(\alpha) &= \frac{1}{8} (63\alpha^5 - 70\alpha^3 + 15\alpha) \end{aligned} \right]$$

$P_n(\alpha)$ é um polinômio de ordem n em α . Sendo n par, P_n só inclui potências pares; sendo n ímpar, P_n só inclui potências ímpares.

$P_n(\alpha)$ é obtido da fórmula de Rodrigues:

$$P_n(\alpha) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{d\alpha} \right)^n (\alpha^2 - 1)^n$$

sendo $n \geq 0$.



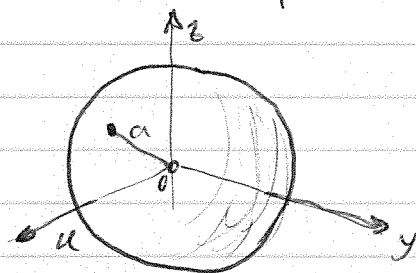
— Esfera com potencial na superfície dependente de θ

Supõe-se o potencial na superfície de uma esfera de raio a centrada na origem dado por

$$\Phi(a, \theta) = \Phi_0 \sin^2 \theta$$

Escrevendo a forma geral do potencial para uma situação de simetria axial segundo z :

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n r^n + b_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos\theta), \quad (r > a)$$



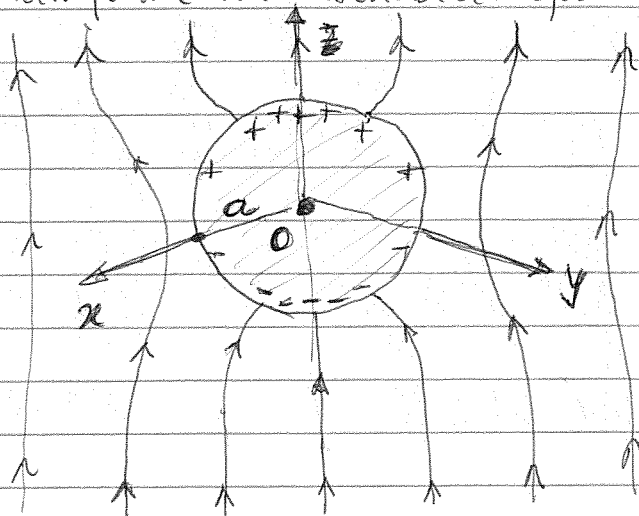
(excluem-se as contribuições Q_n , pois $\theta = 0, \pi$ pertencem ao domínio de solução). Atendendo a que $\Phi(r \rightarrow \infty) = 0$, resulta $a_n = 0$.

3.35a

Esfera condutora sem carga num campo elétrico inicialmente uniforme.

Considere-se uma esfera condutora de raio a , sem carga elétrica, colocada num campo elétrico $\vec{E} = E_0 \hat{z}$ uniforme na ausência da esfera.

As linhas de campo são distorcidas devido à distribuição superficial de carga na esfera (sendo a carga total nula), como ilustra a figura. A superfície esférica é equipotencial, podendo fixar-se o seu potencial como nulo.



Longe da esfera, o campo é $\vec{E} = E_0 \hat{z}$; donde, o potencial será:

$$\phi_{r \rightarrow \infty} \rightarrow -E_0 z + C; C: \text{const.}$$

Como $\phi(x, y, z=0) = 0$, por simetria,

resulta: $C = 0$. As condições fronteira são: $\phi = 0$, sendo $r = a$;

$\phi \rightarrow -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$, sendo $r \gg a$. Assim:

$$R_n(r) = a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} = 0, \text{ da primeira condição.}$$

$$\text{Donde: } \phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[r^n - \frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}} \right] P_n(\cos \theta)$$

Sendo $r \gg a$, a segunda condição impõe: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta$.

Assim, apenas o termo $n=1$ existe no somatório, pois: $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$; e $a_1 = -E_0$. Resulta:

$$\phi(r, \theta) = -E_0 \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right) \cos \theta$$

Os dois termos indicam as contribuições do campo elétrico uniforme e da distribuição superficial de carga induzida na esfera. A densidade superficial de carga é:

$$\begin{aligned} \sigma_s(\theta) &= -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=a} = \epsilon_0 E_0 \left(1 + 2 \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta \Big|_{r=a} = \\ &= 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta. \end{aligned}$$

Densidade superficial de carga $\sigma_s(\theta)$ numa esfera

Considere-se uma densidade superficial de carga $\sigma_s(\theta)$ numa esfera de raio a .

• Na região interior: $\phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \theta)$, $r \leq a$

• Na região exterior: $\phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta)$, $r \geq a$

Como o potencial é contínuo em $r=a$, resulta (recorrendo às propriedades de ortogonalidade das funções P_n): $b_n = a_n a^{2n+1}$.

Em $r=a$ ocorre uma descontinuidade do campo elétrico, associada à carga superficial $\sigma_s(\theta)$ na esfera. Assim:

$$\left(\frac{\partial \phi(r > a)}{\partial r} - \frac{\partial \phi(r < a)}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} = - \frac{\sigma_s(\theta)}{\epsilon_0}$$

Resulta: $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) a_n a^{n-1} P_n(\cos \theta) = \frac{\sigma_s(\theta)}{\epsilon_0}$

Recorrendo às propriedades de ortogonalidade das funções P_n , é possível obter a seguinte expressão para os coeficientes a_n :

$$a_n = \frac{1}{2\epsilon_0 a^{n-1}} \int_0^\pi \sigma_s(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

No caso particular de $\sigma_s(\theta) = \sigma_{s0} \cos \theta$, apenas o termo $n=1$ é não-nulo, sendo: $a_1 = \frac{\sigma_{s0}}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \cos^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta = \frac{\sigma_{s0}}{3\epsilon_0}$

Resulta:

$$\phi(r, \theta) = \begin{cases} \frac{\sigma_{s0}}{3\epsilon_0} r \cos \theta, & r \leq a \\ \frac{\sigma_{s0} a^3}{3\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cos \theta, & r \geq a \end{cases}$$

Ora $\sigma_s(\theta) = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta = \sigma_{s0} \cos \theta$ é a densidade de carga induzida na superfície de uma esfera condutora por um campo elétrico uniforme $\vec{E} = E_0 \hat{z}$. Sendo, então, $\sigma_{s0} = 3\epsilon_0 E_0$, resulta um potencial no interior da esfera condutora $\phi(r \leq a) = E_0 r \cos \theta = E_0 z$; ou seja, resulta um campo elétrico no interior da esfera $\vec{E} = -E_0 \hat{z}$. Esta distribuição superficial de carga produz um campo elétrico que, sobreposto a um campo elétrico uniforme $\vec{E} = +E_0 \hat{z}$, resulta em campo nulo total no interior da esfera condutora.

Como: $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = \frac{2}{3} [P_0(\cos \theta) - P_2(\cos \theta)]$, vem

$$\phi(r, \theta) = \frac{\phi_0}{3} \left[\frac{2a}{r} - \frac{a^3}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \right] \quad (r > a)$$

— Expansão em harmônicos esféricos do potencial, sendo o potencial conhecido no eixo de simetria

Em muitos problemas em que existe simetria axial (eixo zz), o potencial é facilmente determinado nesse eixo. Se o potencial for conhecido no eixo zz e for representável numa série de potências de z :

$$\phi(r, \theta=0) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n & , 0 < z < h \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-(n+1)} & , h < z \end{cases}$$

então:

$$\phi(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \theta) & , 0 < z < h \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) & , h < z \end{cases}$$

Como exemplo, considere-se o campo elétrico criado por um anel circular de raio a e carga elétrica q , situado no plano Oxy e centrado na origem. No eixo zz , o campo elétrico $\vec{E} = E_z(z) \hat{z}$ vale:

$$E_z(z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

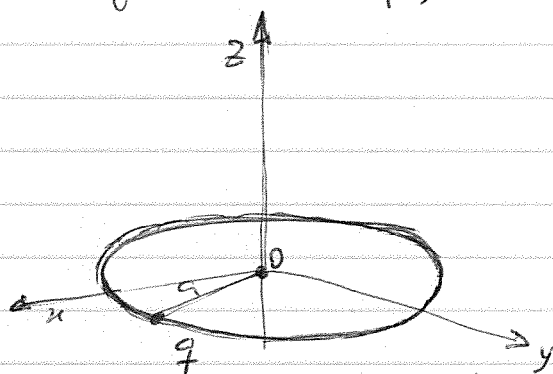
Atendendo ao desenvolvimento binomial

$$(1+x)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 - \frac{105}{48}x^3 + \dots \quad (0 < |x| < 1)$$

$$\text{vem: } E_z(z) = \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \right] \cdot \left(\frac{z}{a} \right) \cdot \left[1 + \left(\frac{z}{a} \right)^2 \right]^{-3/2} =$$

$$= \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \right] \cdot \left(\frac{z}{a} \right) \cdot \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{z}{a} \right)^2 + \frac{15}{8} \left(\frac{z}{a} \right)^4 - \frac{105}{48} \left(\frac{z}{a} \right)^6 + \dots \right]$$

Como $E_z(z)$ verifica a equação de Laplace (ver Secção 2.8), para qualquer ponto (r, θ, ϕ) tal que $r < a$ vem



$$E_z(r, \theta) = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \right) \left(\frac{z}{a} \right) \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^2 P_2(\cos\theta) + \frac{15}{8} \left(\frac{r}{a} \right)^4 P_4(\cos\theta) - \frac{105}{48} \left(\frac{r}{a} \right)^6 P_6(\cos\theta) + \dots \right]$$

(3.37)

($r < a$)