

3.

Métodos de solução da equação de Laplace

3.1. Introdução

3.2. Problemas de eletrostática

3.3. Método de diferenças finitas

3.4. Método de funções complexas

3.5. Método das imagens

3.5.1. Carga pontual e plano condutor ao potencial nulo

3.5.2. Fita uniformemente carregada paralela a plano condutor ao potencial nulo.

3.5.3. Fita uniformemente carregada paralela a cilindro condutor ao potencial nulo.

3.5.4. Superfícies cilíndricas condutoras carregadas, com eixos paralelos

3.5.5. Carga pontual no exterior de uma esfera condutora.

3.5.6. Esfera condutora isolada com carga num campo elétrico uniforme.

3.6. Método de separação de variáveis: coordenadas cartesianas

3.6.1. Distribuições bidimensionais do potencial

3.6.2. Distribuições tridimensionais do potencial

3.7. Método de separação de variáveis: coordenadas cilíndricas

3.7.1. Distribuições de potencial independentes de z .

3.7.2. Distribuições de potencial dependentes de z .

3.8. Método de separação de variáveis: coordenadas esféricas

3.8.1. Distribuições de potencial unidimensionais

3.8.2. Distribuições de potencial com simetria axial

3. Métodos de solução da equação de Laplace

3.1. Introdução

3.2. Problemas de electrostática

Diversos métodos podem ser utilizados para a solução de problemas de Electrostática, que envolvem as equações de Laplace ou de Poisson e condições fronteiras especificadas. Tais métodos podem ser classificados como analíticos, numéricos/computacionais, ou analógicos-experimentais. Alguns destes métodos são abordados nas secções seguintes: método de diferenças finitas, método das imagens, método de separação de variáveis, método de função de variável complexa.

No caso de todas as cargas se distribuírem na superfície de condutores (ou em pontos ou linhas carregadas) no vácuo, a solução da equação de Laplace conduz às distribuições de potencial, de campo eléctrico e de cargas superficiais nos condutores. A generalização a meios dieléctricos será abordada adiante, no Cap. ...

No caso de haver uma distribuição de carga de densidade σ_v prescrita no espaço entre condutores, e distribuições de carga induzidas nas superfícies dos condutores, é necessário resolver a equação de Poisson. A solução geral pode ser escrita como um termo da forma

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{vácuo}} \frac{\sigma_v(\vec{r}') d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

adicionado à solução da equação de Laplace resolvida com a mesma configuração dos condutores mas no vácuo. Este termo adicional, no entanto, deve ser tal que o potencial total verifica todas as condições fronteiras. Se existir apenas uma distribuição prescrita de carga $\sigma_v(\vec{r}')$, então $\phi(\vec{r})$ é determinado pela solução (analítica,

[3.1a]

Considerando a Eletrostática no vácuo, uma questão fundamental é a determinação do campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$ uma vez fornecida a distribuição de carga elétrica (cargas pontuais, em volumes, superfícies ou linhas). Representando sinteticamente essa distribuição de cargas pela função densidade $\sigma(\vec{r}')$, o campo elétrico é expresso como

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \sigma(\vec{r}') \frac{\vec{R}}{R^2} dV', \text{ sendo } \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'. \text{ Este cálculo}$$

direto revela-se difícil, em geral. Uma alternativa de cálculo consiste na determinação da função potencial elétrico $\phi(\vec{r})$ resultante de $\sigma(\vec{r}')$, através de: $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \sigma(\vec{r}') \frac{1}{R} dV'$. Subsequentemente,

o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$ poderá ser determinado através de $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r})$, que em princípio será uma operação mais simples que o cálculo direto de $\vec{E}(\vec{r})$ a partir da distribuição de cargas $\sigma(\vec{r}')$. Mas esta alternativa também se apresenta, em geral, difícil.

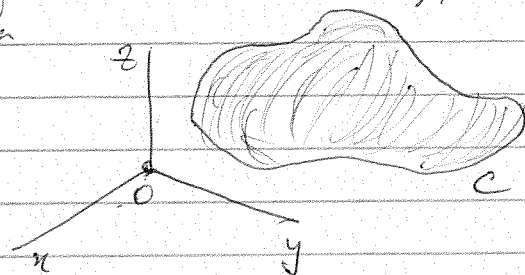
Além disso, a distribuição de carga $\sigma(\vec{r}')$ não é conhecida na generalidade das situações envolvendo condutores: a carga total num condutor (ou o seu potencial) poderá estar bem caracterizada, mas a sua distribuição na superfície do condutor não é, geralmente, conhecida.

Uma abordagem genérica do problema centra-se na solução da equação de Poisson $\nabla^2\phi(\vec{r}) = -\sigma(\vec{r})/\epsilon_0$, com condições fronteiras apropriadas. Em muitas situações de interesse, as cargas elétricas distribuem-se, apenas, nas superfícies de condutores ("eletrodos", por exemplo), sendo $\sigma_v(\vec{r}) = 0$ no espaço entre os condutores. Nessa situação comum, trata-se de resolver a equação de Laplace $\nabla^2\phi(\vec{r}) = 0$, sujeita a condições fronteiras nos condutores. Este problema relaciona-se diretamente com a teoria de funções complexas analíticas, e encontra-se na análise de problemas físicos muito diversos (magnetismo, gravitação, elasticidade, ...).

Por exemplo, uma membrana elástica bem estirada, fixada sobre uma linha de fronteira rígida C (como um aro metálico), apresenta uma forma que é descrita pela

$$\text{equação: } \frac{\partial}{\partial x} \left[g \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[g \frac{\partial h}{\partial y} \right] = 0,$$

$$\text{sendo: } g = \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right]^{-1/2}$$



Se a deformação é relativamente a um 3.16 plano, $g \approx 1$ e resulta imediatamente a equação de Laplace 2D:
 $\partial^2 h / \partial x^2 + \partial^2 h / \partial y^2 = 0$, com a condição fronteira h imposta por C . Assim, existe um modelo mecânico analógico para representar um problema de Eletrostática (deformação elástica $\rightarrow$ potencial elétrico).

As soluções da equação de Laplace (2D, 3D) são genericamente designadas por funções harmônicas.

Em situações reais, com fronteiras condutoras complicadas, recorre-se, com frequência cada vez maior, a métodos numéricos/computacionais de solução. Dado o elevado desempenho atual dos computadores ou sistemas computacionais, esta é uma via importante e progressivamente dominante.

numérica) do integral acima.

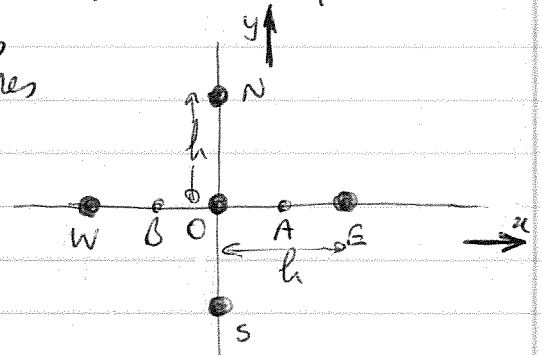
Se σ e ϕ dependem de uma única coordenada, a solução discreta da equação de Poisson é, todavia, útil; por exemplo, quando essa dependência é exclusivamente na coordenada esférica radial r , vem:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma(r)$$

sendo $\sigma(r)$ limitado, com as constantes de integração determinadas pela lei de Gauss para um certo valor de r , e pelo limite $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) \rightarrow 0$.

3.3. Método de diferenças finitas

Por simplicidade na discussão, considere um problema eletrostático a duas dimensões (2D). O domínio de integração da equação de Laplace $\nabla^2 \phi(x,y) = 0$ é dividido por uma malha retangular (considere, ainda por simplicidade, uma malha de passo h constante e igual segundo as duas dimensões), e opere-se com os valores do potencial ϕ nos nodos dessa rede (discretização de $\phi(x,y)$ com passo $h_x = h_y = h$). Seja o nodo 0 e os nodos vizinhos N, S, E, W, como mostra a figura. Para valores de h suficientemente pequenos,



vem:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_A \approx \frac{\phi_E - \phi_0}{h}$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_B \approx \frac{\phi_0 - \phi_W}{h}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_0 \approx \frac{(\partial \phi / \partial x)_A - (\partial \phi / \partial x)_B}{h} \approx \frac{\phi_E + \phi_W - 2\phi_0}{h^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)_0 \approx \frac{\phi_N + \phi_S - 2\phi_0}{h^2} \quad (\text{analogamente a } (\partial^2 \phi / \partial x^2)_0)$$

Donde a equação de Laplace escreve-se, em diferenças finitas:

$$(\nabla^2 \phi)_0 \approx \frac{\phi_E + \phi_N + \phi_W + \phi_S - 4\phi_0}{h^2}$$

ou seja:

$$\boxed{\phi_0 \approx \frac{1}{4} (\phi_E + \phi_N + \phi_W + \phi_S)}$$

3.2a

Da discretização da equação de Laplace, resulta que o potencial num nodo é a média dos potenciais dos nodos vizinhos na malha de discretização usada. Genericamente, a equação de Laplace indica que o valor do potencial $\phi(x,y)$ resulta da média sobre a vizinhança do ponto (x,y) considerado, numa situação 2D: $\phi(x,y) = \frac{1}{2\pi R} \oint_{C(R)} \phi(x',y') dl'$; $C(R)$: circunferência (raio R) centrada em (x,y) .

Não ocorrem máximos ou mínimos locais do potencial. Os extremos do potencial verificam-se apenas nas fronteiras. Numa situação 2D, a função harmónica solução do problema minimiza a área da superfície $\phi(x,y)$ compreendida entre a ~~linha~~ de fronteira C .

Em 3D, verificam-se igualmente estas propriedades:

- $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{S(R)} \phi(\vec{r}') dS'$; $S(R)$: superfície esférica (raio R) centrada em $\vec{r}$ (vizinhança de $\vec{r}$)
- Não existem extremos locais do potencial $\phi(\vec{r})$, que ocorrem apenas nas fronteiras.

em cada ponto da malha retangular. Conclui-se que o potencial no nodo i é a média dos potenciais dos pontos vizinhos na malha de discretização.

Numa área de cálculo retangular, y

com nodos em (x_i, y_j) ,
 $i=1, 2, \dots, M$; $j=1, 2, \dots, N$

é necessário resolver

$$(M-2)(N-2)$$

equações simultâneas, com a forma acima, para determinar o potencial $\phi_{ij}(x_i, y_j)$ nos nodos interiores à fronteira.

Recorre-se a um método de relaxação, consistindo nos seguintes passos:

(i) estima-se uma solução aproximada em "razoável" $\tilde{\phi}_{ij}$ para todos os nodos interiores;

(ii) em cada nodo, calcula-se o resíduo

$$R_{ij} = \tilde{\phi}_{i+1,j} + \tilde{\phi}_{i-1,j} + \tilde{\phi}_{i,j+1} + \tilde{\phi}_{i,j-1} - 4\tilde{\phi}_{ij} ;$$

(iii) altera-se o valor anterior de $\tilde{\phi}_{ij}$ para um novo valor, com uma correção $\Delta\phi_{ij} = p \frac{R_{ij}}{4}$, com $p \in [1, 2]$ (intervalo de valores do parâmetro de relaxação p em que existe convergência assegurada);

(iv) repete-se o processo (iii + ii) até que os resíduos R_{ij} se tornem suficientemente pequenos.

A malha de discretização deve ser adequada para permitir a boa definição das fronteiras e uma representação suficientemente aproximada do potencial em regiões de acentuada variação espacial. A escolha da dimensão da região retangular de discretização deve, igualmente, ser bem ponderada, de modo a que a condição imposta na fronteira retangular ($\phi=0$, na análise acima descrita) não afete a solução correta na região interior de interesse.

3.4. Método de funções complexas

Este método é usado na resolução da equação de Laplace $\nabla^2\phi=0$ com fronteiras condutoras, em problemas a duas dimensões (2D) em que $\phi = \phi(x, y)$. O método baseia-se nas propriedades de funções complexas $W(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$ de variável complexa $z = x + iy$.

Para que dw/dz tenha significado único (diz-se que $w(z)$ é uma função analítica) é condição necessária e suficiente que se verifiquem as condições de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{De facto: } \frac{dw}{dz} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Delta y}{\Delta x + i \Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left[\frac{1 + i \frac{\Delta y}{\Delta x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right)}{1 + i \Delta y / \Delta x} \right] \end{aligned}$$

Para que dw/dz seja independente da orientação de Δz , deve ter-se:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) / \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 1$$

o que é equivalente às condições de Cauchy-Riemann acima.

Tomando as derivadas $\partial/\partial x$ e $\partial/\partial y$ da primeira e segunda condições, respectivamente, ou inversamente, resulta que

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \\ \nabla^2 v = 0 \end{cases}$$

Assim, as partes real e imaginária da função analítica w , e a própria função w , verificam a equação de Laplace. Além disso, as funções $u(x,y)$ e $v(x,y)$ correspondem a famílias de linhas $u=\text{const.}$, $v=\text{const.}$, que são ortogonais entre si; de facto, como ∇u é ortogonal a $u=\text{const.}$ e ∇v é ortogonal a $v=\text{const.}$, calculando $\nabla u \cdot \nabla v = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{j} \right) \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \hat{j} \right) =$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$$

logo, ∇u e ∇v são mutuamente ortogonais, e daí concluir que $u=\text{const.}$ e $v=\text{const.}$ são famílias de linhas mutuamente ortogonais.

A aplicação desta técnica das funções complexas à solução da equação de Laplace baseia-se, então, no seguinte:

Se for possível identificar uma função complexa w cuja parte real u satisfaz as condições fronteiras do potencial eléctrico $\phi(x,y)$ na região V de interesse, então $\phi = u$, estando v associado às linhas de força do campo eléctrico $\vec{E} = -\nabla \phi$; se a parte imaginária v de w satisfizer as condições front-

teira, então $\phi = v$ e $u = \text{const.}$ representa uma linha de força do campo eléctrico $\vec{E}$.

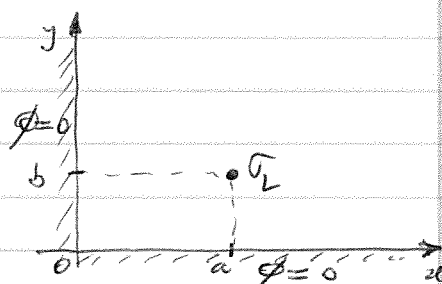
Os exemplos seguintes ilustram a aplicação deste método.

— Distribuição rectilínea de carga e fronteiras condutoras planas ortogonais

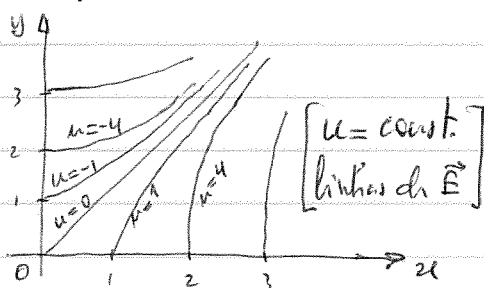
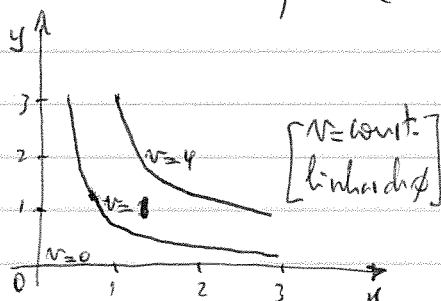
Uma distribuição rectilínea de carga de densidade linear σ_L está situada em (a, b, z) , na presença de fronteiras planas condutoras $x=0$ e $y=0$, ao potencial nulo.

Pretende-se obter a distribuição de potencial $\phi(x, y)$ no primeiro quadrante, ou seja, a solução de $\nabla^2 \phi = -\sigma/\epsilon_0$, com

$$\sigma = \begin{cases} 0, & (x, y) \neq (a, b) \\ \int_V \sigma dV = \sigma_L \end{cases}$$



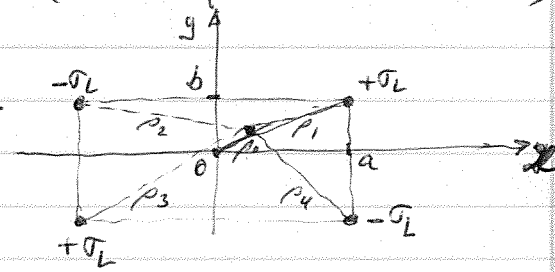
Verifica-se, de imediato, que a função complexa $W = Z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$ tem uma parte imaginária que satisfaz as condições fronteiriças nos planos Oxz e Oyz . Assim, $\phi = K(2xy)$, sendo K uma constante não-determinada, será a solução aproximada de ϕ numa região V tal que $(x \ll a, y \ll b)$.



(A determinação da constante K pode efectuar-se através do método das imagens, abordado na secção 3....). Verifica-se facilmente que o potencial criado pela distribuição $\sigma_L(a, b)$ e pelas "rectas-imagens" $-\sigma_L(-a, b)$, $-\sigma_L(a, -b)$, $+\sigma_L(-a, -b)$ verifica a equação de Laplace, obviamente, bem como as condições fronteiriças no plano $x=0$ e $y=0$; daí que, no primeiro quadrante (e neste apenas!), o potencial criado pelas 4 rectas carregadas coincide com a solução do problema. Assim, considerando a distribuição de potencial de rectas de carga, vem:

$$\phi = \frac{\sigma_L}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^2 - \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho_2}\right)^2 + \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho_3}\right)^2 - \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho_4}\right)^2 \right]$$

com $\rho_0 = \sqrt{a^2 + b^2}$. Para um ponto



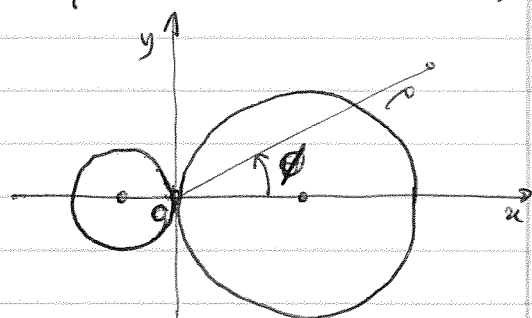
de coordenadas (x, y) , próximo da origem, calculando ρ_i ($\rho_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}$, com (x_i, y_i) de acordo com as coordenadas das quatro retas) e $\ln\left(\frac{\rho_0}{\rho_i}\right)^2 = \ln(1+\alpha)$ para $\alpha \ll 1$, vem:

$$\phi = \left[\frac{\sigma_L}{\pi \epsilon_0} \right] \left(\frac{ab}{(a^2 + b^2)^2} \right) (2\pi y)$$

Superfícies condutoras cilíndricas adjacentes

Dois superfícies cilíndricas, com eixos paralelos a z e situados no plano Oxz , estar separadas por uma distância infinitesimal em $x=0$, sendo os respectivos potenciais arbitrários.

A função complexa $w = 1/z$ apresenta uma parte real u tal que $u=K$ é uma circunferência centrada no eixo x :



$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) + i \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \right) = \left(\frac{\cos \phi}{\rho} \right) + i \left(-\frac{\sin \phi}{\rho} \right) = u + iv$$

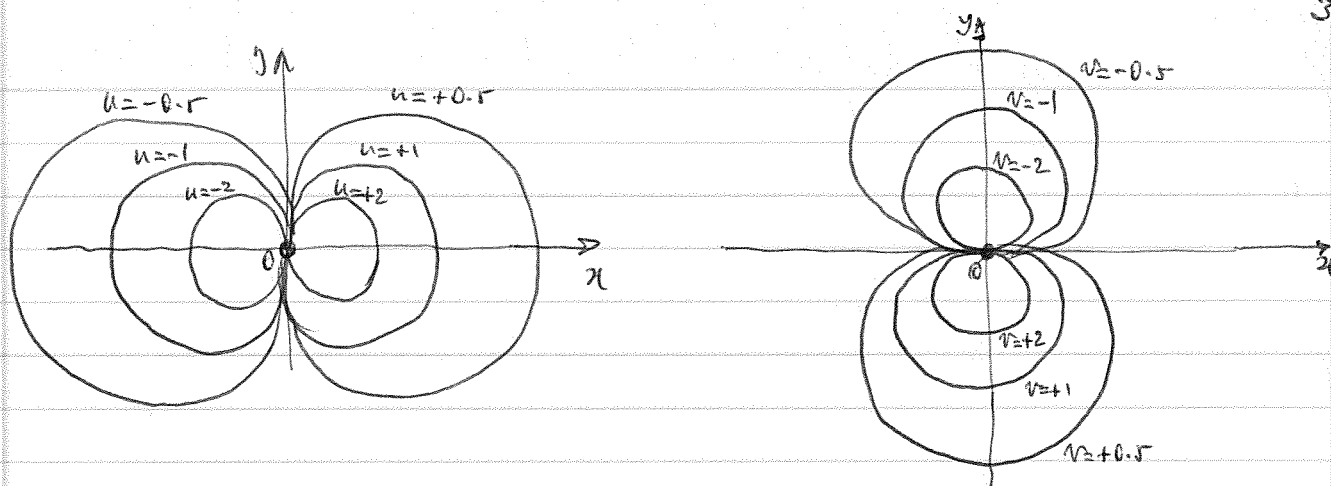
Fazendo $u=K_1$, vem: $\left(x - \frac{1}{2K_1} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2K_1} \right)^2$

que representa uma família de circunferências centradas no eixo x ; sendo $K_1 > 0$, o centro localiza-se em $x > 0$, e inversamente. Semelhantemente, $v=K_2$ conduz a uma família de circunferências centradas no eixo y .

Tomando $\phi = u$, é possível resolver casos interessantes:

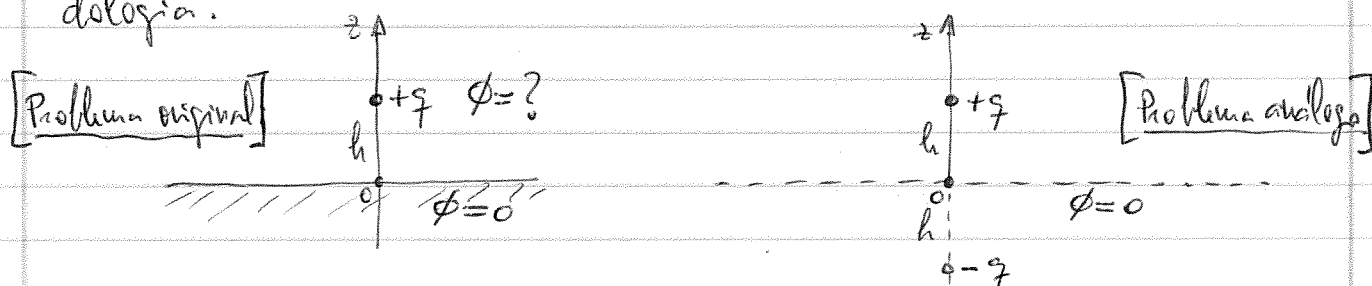
- potencial no exterior das superfícies cilíndricas com eixos em $x_1 = 1/2K_1 < 0$ e $x_2 = 1/2K_2 > 0$; se os potenciais das superfícies cilíndricas forem iguais, a solução simplifica uma distribuição utilíssima de carga adicional, colocada em potencial adequada, sendo o método apenas aproximado.
- potencial entre uma superfície cilíndrica com centro em $x_1 = 1/2K_1 < 0$ e o plano condutor $x_2 = 0$ ao potencial zero.
- potencial na região entre superfícies cilíndricas com centros $x_1, x_2 > 0$.

A família de linhas $v = \text{const.}$ corresponde a linhas de força de E .



3.5. Método das imagens

Este método procura determinar a solução de um problema electrostático (ou seja, determinar ϕ verificando $\nabla^2\phi=0$ no espaço entre condutores e satisfazendo condições fronteira na superfície dos condutores) através da identificação de um outro "problema análogo", cuja solução é conhecida ou fácil de determinar, tal que as superfícies equipotenciais desse "problema análogo" coincidem com condições fronteira do problema original na região do espaço com interesse (mas não em todo o espaço). A figura ilustra esta analogia.



No "problema original", a carga pontual na vizinhança do plano condutor ligado à terra ($z=0$, $\phi=0$) induz neste uma distribuição de carga superficial σ_s não-uniforme. A carga pontual e essa distribuição de carga induzida criam um campo eléctrico no semi-espaço $z \geq 0$ tal que o plano é uma superfície equipotencial. Pretende-se determinar a função potencial ϕ tal que $\nabla^2\phi=0$ em $z \geq 0$ e $\phi(z=0)=0$.

O "problema análogo" é o de determinar do potencial ϕ criado por duas cargas pontuais ($\pm q$) nas posições $z=\pm h$. É imediato concluir que o plano mediano ($z=0$) corresponde a uma superfície equipotencial $\phi=0$; assim, esta equipotencial do "problema análogo" e o plano condutor do "problema original" coincidem. Logo, no espaço $z \geq 0$, a solução

Solução de problemas de Eletrostática no vácuo

- Expressão geral do potencial elétrico num volume V limitado por S

Seja conhecida a distribuição de carga elétrica, definida pela função densidade de carga $\rho_v(\vec{r})$, a determinação do potencial elétrico $\phi(\vec{r})$ resulta de $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_v(\vec{r}')}{R} dV'$ (com $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$; $R = |\vec{R}|$).

O campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$, por sua vez, pode obter-se de $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r})$, ou por integração usando a função densidade de carga: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_v(\vec{r}')\vec{R}}{R^3} dV'$.

Todavia, na generalidade das situações, a distribuição de carga $\rho_v(\vec{r})$ não é conhecida. Por exemplo, as cargas distribuem-se, na superfície de condutores com forma arbitrária, de modo não-uniforme, não conhecido a priori.

A função potencial $\phi(\vec{r})$ deve verificar a equação de Laplace ($\nabla^2\phi=0$), ou a equação de Poisson ($\nabla^2\phi = -\rho_v/\epsilon_0$); e, em certas fronteiras (por exemplo, na superfície de condutores), a função potencial $\phi(\vec{r})$ ou o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$ devem verificar certas condições. A análise deste problema recorre aos teoremas de Green.

• Primeiro teorema de Green: Sendo $\vec{A}(\vec{r})$ um campo vetorial definido por $\vec{A}(\vec{r}) = \phi(\vec{r})\nabla\psi(\vec{r})$, em que $\phi(\vec{r})$ e $\psi(\vec{r})$ são campos escalares, verifica-se que $\nabla \cdot \vec{A} = \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi)$.

Recorrendo ao teorema de Gauss-Green,

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}') dV' = \oint_{S(V)} \vec{A}(\vec{r}') \cdot \hat{n}' dS' \quad (\nabla': \text{operador no domínio } \vec{r}'),$$

e como $\vec{A} \cdot \hat{n}' = [\phi \nabla \psi] \cdot \hat{n}' = \phi \frac{\partial \psi}{\partial n'}$ ($\frac{\partial}{\partial n'}$: derivada normal), resulta:

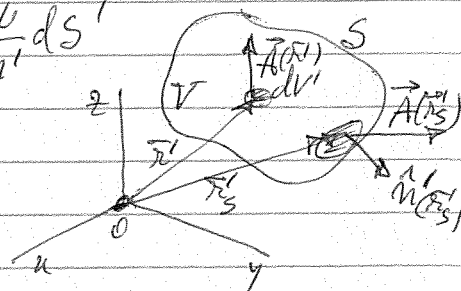
$$\int_V [\phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi)] dV' = \oint_{S(V)} \phi \frac{\partial \psi}{\partial n'} dS'$$

• Segundo teorema de Green: intermutando os campos ϕ e ψ na expressão anterior, resulta:

$$\int_V [\psi \nabla^2 \phi + (\nabla \psi) \cdot (\nabla \phi)] dV' = \oint_{S(V)} \psi \frac{\partial \phi}{\partial n'} dS'$$

Subtraindo, membro a membro, as duas equações anteriores, vem:

$$\int_V [\phi(\vec{r}') \nabla^2 \psi(\vec{r}') - \psi(\vec{r}') \nabla^2 \phi(\vec{r}')] dV' = \oint_{S(V)} [\phi(\vec{r}') \frac{\partial \psi(\vec{r}')}{\partial n'} - \psi(\vec{r}') \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial n'}] dS'$$



faz-se: $\psi(\vec{r}') = \frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$; $\varphi(\vec{r}') = \phi(\vec{r}')$ (sendo ϕ o potencial)

Vem, então: $\nabla^2 \psi(\vec{r}') = \nabla^2 \phi(\vec{r}') = -\rho_V(\vec{r}')/\epsilon_0$ (equação de Poisson)

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}') = \nabla^2 (1/R) = \nabla^2 (1/|\vec{r} - \vec{r}'|) = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{R}).$$

Então, do segundo teorema de Green, resulta:

$$-4\pi \int_V \phi(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV' + \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_V(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \oint_S \left[\phi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial n'} \right] dS'$$

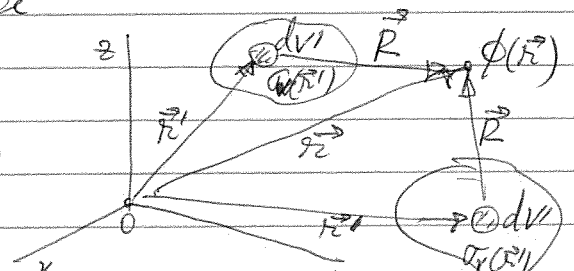
Se o ponto $(\vec{r})$ onde se calcula o potencial ϕ se situa no interior do volume V , então o primeiro termo é $-\phi(\vec{r})$, pela definição de $\delta(\vec{r})$.

Então:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_V(\vec{r}')}{R} dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial n'} - \phi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{R} \right) \right] dS'$$

Importa analisar duas situações relevantes:

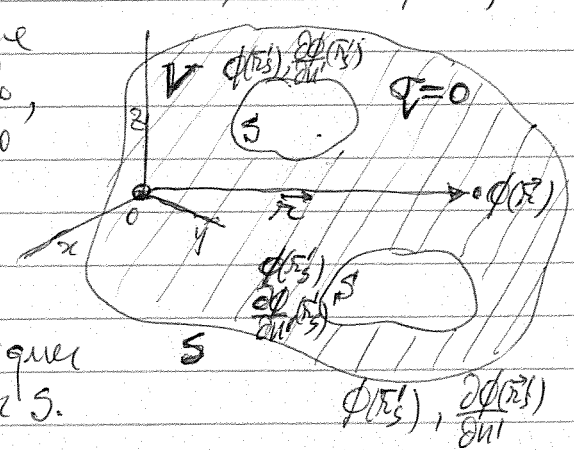
- Superfície S no infinito: $\phi(\vec{r})$ é obtido em qualquer ponto $\vec{r}$, a partir da distribuição de carga $\rho_V(\vec{r}')$. De facto, o primeiro termo no integrando do integral de superfície, considerando uma carga pontual, varia com $\vec{r}'$ como $1/R \frac{\partial \phi}{\partial n'} \sim 1/R^3$ (campo elétrico decai mais rapidamente que R^{-1} ...), donde a contribuição para $\phi(\vec{r})$ é nula. A contribuição do segundo termo do integrando do integral de superfície é também nula. Assim



$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_V(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad \left(S \rightarrow \infty ; V \text{ infinito} \right)$$

$(\phi(\vec{r}) \text{ obtido em qualquer ponto } \vec{r})$

- Carga nula em V : $\rho_V(\vec{r}') = 0$ no volume V , limitado por S , onde se calcula $\phi(\vec{r})$. A fronteira S que limita V pode ser constituída, por exemplo, pelas superfícies de condutores. Então o potencial $\phi(\vec{r})$ é determinado pelos valores do potencial e da derivada normal do potencial na fronteira (superfície S) da região de integração V , em quaisquer pontos $(\vec{r})$ do volume V limitado por S .



Condições fronteira

3.7C

A fixação simultânea de $\phi(\vec{r})$ e $\partial\phi/\partial n(\vec{r})$ na fronteira S de V conduz a sobre-determinação do problema. Na realidade, é apenas necessário fixar um dos tipos de condição fronteira:

- Condição fronteira de Dirichlet: $\phi(\vec{r})$ é dado em S .
- Condição fronteira de Neumann: $\partial\phi/\partial n(\vec{r})$ é dado em S .

Unicidade da solução $\phi(\vec{r})$

Supondo duas soluções distintas de um problema de Eletrostática, designados por $\phi_{1,2}(\vec{r})$, ambas verificando a equação de Poisson ($\nabla^2\phi_{1,2} = -\rho/\epsilon_0$), ou de Laplace, resulta: $\nabla^2(\phi_1 - \phi_2) = 0$. Na fronteira S , ambas as soluções verificam as mesmas condições:

Condições de Dirichlet: $\phi_1(S) = \phi_2(S)$

Condições de Neumann: $\partial\phi_1/\partial n(S) = \partial\phi_2/\partial n(S)$

Fazendo $u(\vec{r}) = \phi_1(\vec{r}) - \phi_2(\vec{r})$, do primeiro teorema de Green, com $\varphi = \psi = u$, resulta: $\int_V [u(\vec{r}') \nabla'^2 u(\vec{r}') + (\nabla' u(\vec{r}'))^2] dV' = \oint_S u(\vec{r}') \frac{\partial u(\vec{r}')}{\partial n'} dS'$

Como $\nabla'^2 u(\vec{r}') = 0$ em V , e em S se tem $u=0$ (C. Dirichlet) ou $\partial u/\partial n = 0$ (C. Neumann), resulta: $\int_V [\nabla' u(\vec{r}')]^2 dV' = 0$. Dondi $\nabla u(\vec{r}) = 0$.

Ou seja, $u(\vec{r})$ é constante em V ; então:

- Condições de Dirichlet: Como $u(\vec{r}) = 0$ em S , resulta que a constante é nula; $u(\vec{r}) = 0$ em qualquer ponto de V e S ; ou seja, $\phi_1 \equiv \phi_2$ em V e S .

- Condições de Neumann: $u(\vec{r}) = \phi_1(\vec{r}) - \phi_2(\vec{r}) = \text{constante}$; mas tal não é relevante, pois o potencial $\phi(\vec{r})$ é sempre definido a menos de constante, dependente da referência de potencial adotada.

Resulta das considerações anteriores que $\phi(\vec{r})$ é univocamente determinado, quer se adote condição fronteira de Dirichlet, quer se adote condição fronteira de Neumann. Assim, $\phi(S)$ e $\partial\phi/\partial n(S)$ não são independentes. Confirma-se que a fixação simultânea de ambas as condições fronteira resulta em sobre-determinação do problema.

Funções de Green

Resultam, acima, uma expressão geral para o potencial $\phi(\vec{r})$:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_{S(V)} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial\phi(\vec{r}')}{\partial n'} - \phi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{R} \right) \right] dS'$$

Nesta equação, o potencial $\phi(\vec{r})$ depende simultaneamente de $[\text{3.7d}]$ $\phi(\vec{r})$ e de $\frac{\partial \phi}{\partial n}(\vec{r})$ em S ; tal resultado de uma escolha da função $\psi(\vec{r})$ como $\psi(\vec{r}') = 1/|\vec{r}-\vec{r}'|$. Esta função verifica a equação de Poisson ($\nabla^2(1/|\vec{r}-\vec{r}'|) = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')$) mas não as condições fronteira de Dirichlet ou de Neumann em S , exceto quando $S \rightarrow \infty$.

Usa-se, então, uma função de Green $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + F(\vec{r}, \vec{r}')$,

com o termo adicional F , tal que $\nabla^2 F = 0$ no volume V e sendo $G(\vec{r}, \vec{r}')$ simétrica em $\vec{r}, \vec{r}'$: $G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}', \vec{r})$. Tal introduz liberdade adicional, que permite eliminar um dos termos do integrando do integral sobre S .

Recorrendo ao segundo teorema de Green, fazendo $\psi = \phi$ e $\psi = G$, resulta uma expressão para $\phi(\vec{r})$:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \sigma_V(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial n'} - \phi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \right] dS'$$

Escolhendo apropriadamente G (i.e., F), é possível eliminar um dos integrais de superfície:

• Condições de Dirichlet: $G_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ se $\vec{r}' = \vec{r}'(S)$. Então:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \sigma_V(\vec{r}') G_D(\vec{r}, \vec{r}') dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \phi(\vec{r}') \frac{\partial G_D(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} dS'$$

• Condições de Neumann: $\frac{\partial G_N(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} = -\frac{4\pi}{S}$ se $\vec{r}' = \vec{r}'(S)$, sendo S a área total da fronteira S .

$$\text{Então: } \phi(\vec{r}) = \langle \phi \rangle_S + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \sigma_V(\vec{r}') G_N(\vec{r}, \vec{r}') dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial n'} G_N(\vec{r}, \vec{r}') dS'$$

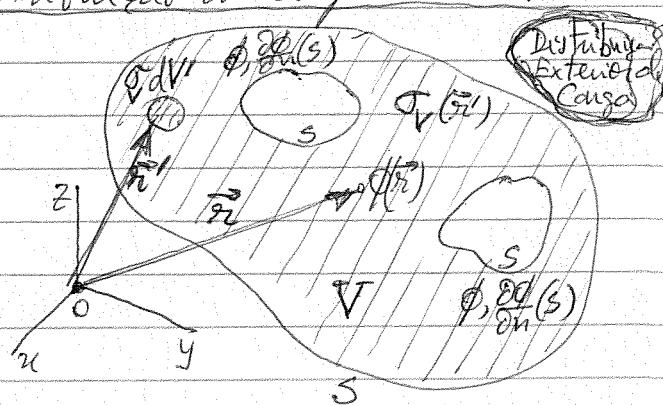
em que $\langle \phi \rangle_S = \frac{1}{S} \oint_S \phi(\vec{r}') dS$ é o valor médio do potencial na

superfície S . Esta constante pode ser adicionada à constante arbitrária decorrente da escolha da referência do potencial. Na situação em que $S \rightarrow \infty$, $\langle \phi \rangle_S \rightarrow 0$, se $\phi(\vec{r})$ decair mais rapidamente do que $1/r$.

Se a função $F(\vec{r}, \vec{r}')$ solução da equação de Laplace em V , está associada ao potencial de uma distribuição de carga no exterior de V . A escolha da função $F(\vec{r}, \vec{r}')$

será tal que, associada à função $1/|\vec{r}-\vec{r}'|$ (que permite calcular a contribuição de cargas elementares em pontos $\vec{r}'$: $\sigma_V(\vec{r}') dV'$), assegura que a função de Green $G(\vec{r}, \vec{r}')$ verifica, na fronteira S .

A distribuição de carga no exterior de V



depende da distribuição de cargas no interior de V , de tal modo 3.7e que o potencial ϕ ou a sua derivada normal $\partial\phi/\partial n(s)$, verifiquem as condições fronteira especificadas (por exemplo, o potencial na superfície de condutores; a densidade de carga ou o campo elétrico ($E(s) = \nabla\phi(s)/\epsilon_0$) na superfície de condutores). Ou seja, $\phi(\vec{r}, \vec{r}')$ depende de $\vec{r}'$, ponto no volume V onde existirá carga. O método das imagens é baseado neste princípio.

• Exemplo: Esfera condutora ao potencial nulo, no campo de uma carga pontual

Considera-se uma esfera condutora de raio a , cujo potencial é nulo ($\phi_s = 0$), e uma carga pontual q no seu exterior. Dada a simetria do problema, situa-se a carga q no eixo Oy , sem tal implicar qualquer limitação, numa posição $\vec{y} = y\hat{y}$ ($y > a$).

As condições fronteira são:

$$\phi(a) = 0 ; \phi(\infty) = 0$$

Trata-se de um problema de Dirichlet, procurando-se a função de Green G_D , e pretendendo-se determinar o potencial

$\phi(\vec{r})$ no exterior da esfera ($r > a$ e o volume V). Considera-se uma distribuição de carga fora do domínio V , ou seja, no interior da esfera ($r < a$). Essa distribuição de carga é simples, neste caso: carga pontual q' no interior da superfície esférica, no eixo Oy , à distância y' da origem colocada no centro da esfera.

O potencial criado pelas duas cargas pontuais é:

$$\phi(\vec{r}, \vec{y}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\vec{r} - \vec{y}|} + \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{y}'|} \right]$$

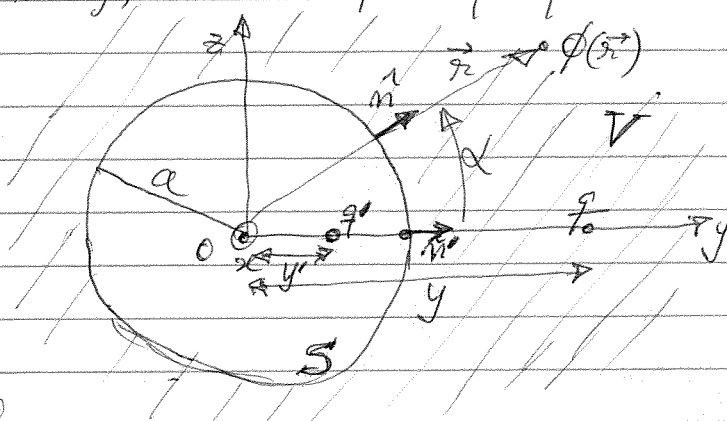
Definindo os vetores $\hat{n} = \vec{r}/|\vec{r}| = \hat{r}$ e $\hat{n}' = \hat{y}$, então na superfície esférica S (que limita V) tem-se:

$$\begin{aligned} \phi(|\vec{r}|=a, \vec{y}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{a|\hat{n} - \frac{y}{a}\hat{n}'|} + \frac{q'}{y'|\hat{n}' - \frac{a}{y'}\hat{n}|} \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{a\sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2} - 2\frac{y}{a}\cos\alpha}} + \frac{q'}{y'\sqrt{1 + \frac{a^2}{y'^2} - 2\frac{a}{y'}\cos\alpha}} \right] = 0 \end{aligned}$$

(verificar as condições fronteira de Dirichlet da função $G_D(\vec{r}, \vec{y})$).

A equação é válida para qualquer valor de $\hat{n} \cdot \hat{n}' = \cos\alpha$ se

$$q' = -\frac{a}{y} q \quad ; \quad y' = \frac{a^2}{y}$$



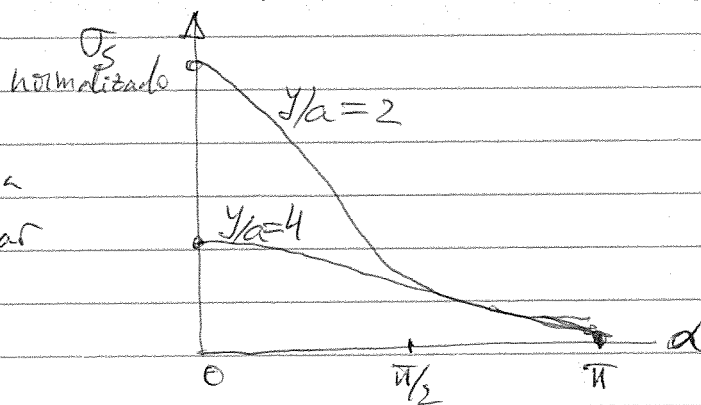
Resulta o seguinte potencial no exterior da esfera (volume V): 3.7f

$$\phi(\vec{r}, \vec{y}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{y}|} - \frac{a}{y \left| \frac{a^2}{y^2} \vec{y} - \vec{r} \right|} \right], \quad r \geq a$$

A solução encontrada é única, e a função G_D escreve-se

$$G_D(\vec{r}, \vec{y}) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{y}|} - \frac{a}{y \left| \frac{a^2}{y^2} \vec{y} - \vec{r} \right|}$$

Verifica-se facilmente que $G_D(\vec{a}, \vec{y}) = 0$ e $G_D(\vec{r}, \vec{a}) = 0$, e $G_D(\vec{r}, \vec{y}) = G_D(\vec{y}, \vec{r})$.
A densidade de carga induzida na superfície esférica é $\sigma(r=a) = -\epsilon_0 \partial\phi/\partial r|_{r=a}$, e a carga total na superfície esférica é $Q = \int_S \sigma a^2 d\Omega = q$.

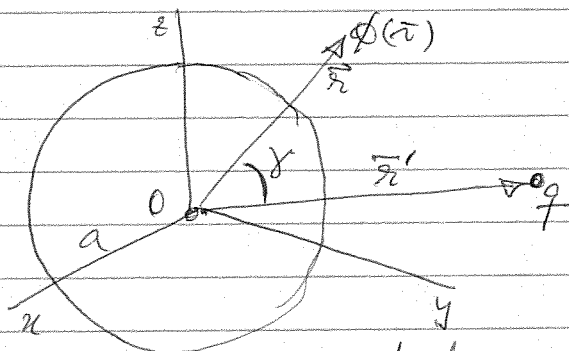


Considerando a carga q numa posição arbitrária $\vec{r}'$, a função de Green escreve-se:

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{r^2 r'^2}{a^2} + a^2 - 2rr'\cos\gamma}}$$

$$\left. \frac{\partial G_D(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \right|_{r'=a} = - \frac{r^2 - a^2}{a(r^2 + a^2 - 2ar\cos\gamma)^{3/2}}$$

(sinal (-) pois $\partial/\partial n' = -\partial/\partial r'$)



Existindo, no exterior da esfera (região V), não numa carga pontual q mas antes numa distribuição de carga $\sigma_r(\vec{r})$ em V , a solução geral do potencial escreve-se:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V G_D(\vec{r}, \vec{r}') \sigma_r(\vec{r}') dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\partial G_D(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \phi(\vec{r}') dS' =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma)} \sigma_r(\vec{r}') r'^2 dr' d\Omega' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{\left(\frac{r^2 r'^2}{a^2} + a^2 - 2rr'\cos\gamma \right)^{3/2}} \sigma_r(\vec{r}') r'^2 dr' d\Omega' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \phi(a, \theta', \varphi') \frac{(r^2 - a^2)}{a(r^2 + a^2 - 2ar\cos\gamma)^{3/2}} a^2 d\Omega'$$

sendo: $\cos\gamma = \hat{r} \cdot \hat{r}' = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\varphi - \varphi')$

No caso em que não existe carga no exterior da esfera ($\sigma_r(\vec{r}) = 0$),

mas é fixada a distribuição de potencial na superfície esférica S [379]
(relativamente ao potencial de referência, geralmente $\phi(\infty)=0$),
 $\phi(a, \theta', \varphi')$, o potencial na região exterior $V(r \geq a)$ é:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \phi(a, \theta', \varphi') \frac{a(r^2 - a^2)}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta)^{3/2}} d\Omega'$$

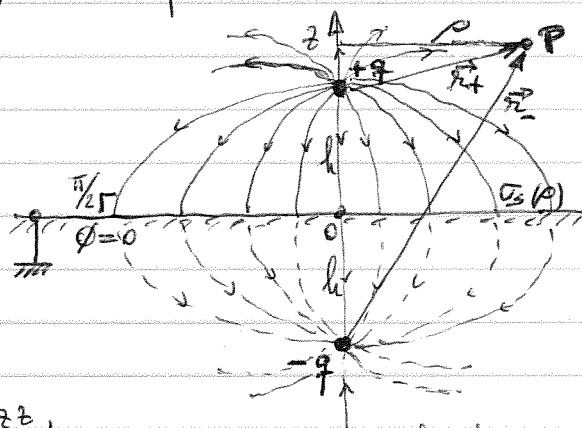
ϕ do "problema análogo" (fácil de calcular, pois resulta dos potenciais criados por duas cargas pontuais) coincide com a solução ϕ do "problema original". Note-se que a carga $-q$ situada em $z=-h$ no "problema análogo" é a "imagem" da carga do "problema original" na fronteira condutora $z=0$, e daí a designação do método.

Salienta-se que os dois problemas são distintos, apenas coincidindo as soluções ϕ numa região do espaço (neste caso, $z \geq 0$; no "problema original", o potencial é nulo para $z \leq 0$, enquanto no "problema análogo" o potencial é diferente de zero nessa região).

Apresenta-se alguns exemplos de aplicações deste método, começando pela análise da configuração simples usada na ilustração do procedimento.

3.5.1. Carga pontual e plano condutor ao potencial nulo

Sem perda de generalidade, considera-se uma carga pontual positiva ($q > 0$) situada em $(0, 0, z=h > 0)$, e o plano condutor $z=0$ ao potencial nulo ($\phi(z=0)=0$). Esta potencial nulo é mantido por ligação à terra (fonte infinita de cargas a potencial constante e igual a zero). É intuitivo que, por influência electrostática da carga $+q$, existirá uma distribuição de carga superficial no plano condutor, com simetria total em torno do eixo zz ,



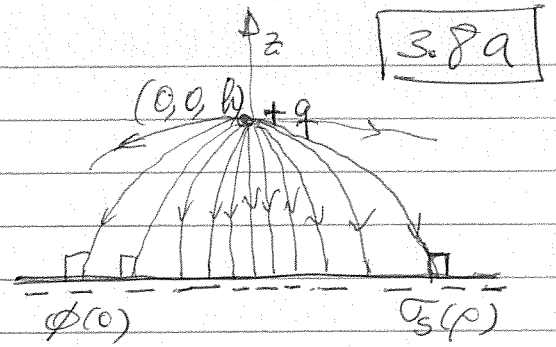
$\sigma_s(\rho; z=0)$; essas cargas superficiais terminam as linhas de força do campo eléctrico, originadas em $+q$ e perpendiculares ao plano $z=0$ sendo $\vec{E}(\rho; z=0) = \sigma_s(\rho; z=0)/\epsilon_0 \hat{z}$.

Considerando o potencial $\phi(P)$ no "problema análogo", resultante das cargas $\pm q$ em $z=\pm h$, vem:

$$\phi(x, y, z) = \phi(\rho, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

com $r_{\pm} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z \mp h)^2} = \sqrt{\rho^2 + (z \mp h)^2}$. Verifique que $\phi(z=0)=0$, logo esta equipotencial do "problema análogo" coincide com a fronteira de potencial nulo do "problema original".

Existe, obviamente, força atrativa do plano carregado com densidade superficial de carga $\sigma_s(\rho)$ sobre a carga pontual $+q$. Como o potencial elétrico em torno de $+q$, no espaço $z \geq 0$, coincide com o potencial do "problema análogo", o campo elétrico nessa região $z \geq 0$ é igual ao campo elétrico do "problema análogo". Assim, a força que atua sobre $+q$ é a força devida ao campo elétrico criado pela carga imagem: $\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2h)^2} \hat{z}$.



Como se verá adiante, a energia elétrica associada à configuração Carga $+q$ /Plano condutor não é igual à energia elétrica associada à "configuração análoga" Carga $+q$ /Carga $-q$. Na realidade, na primeira configuração o campo elétrico só existe no espaço $z \geq 0$; enquanto na segunda configuração, o campo existe em todo o espaço. Neste caso concreto, e dada a simetria das configurações, a energia da primeira configuração é metade da energia associada à segunda configuração.

O campo eléctrico calcula-se, em qualquer ponto do semi-espaco $z \geq 0$, por simples diferenciação, $\vec{E} = -\nabla\phi$. No plano condutor ($z=0$), verifica-se facilmente que

$$\vec{E}(\rho, z=0) = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=0} \hat{z} = -\frac{qh}{2\pi\epsilon_0} (\rho^2 + h^2)^{-3/2} \hat{z}$$

e a densidade superficial de carga no plano condutor vale

$$\sigma_s(\rho, z=0) = \epsilon_0 E_z(\rho, z=0) = -\frac{qh}{2\pi} (\rho^2 + h^2)^{-3/2}$$

A carga total no plano condutor calcula-se facilmente:

$$\int_{\text{Plano Condutor}} \sigma_s(\rho, z=0) dS = \int_0^\infty -\frac{qh}{2\pi} (\rho^2 + h^2)^{-3/2} \cdot 2\pi\rho d\rho = -q$$

Assim, esta carga superficial, não-uniformemente distribuída, tem o valor total igual ao da carga imagem.

No semi-espaco $z < 0$, a solução do método das imagens não se aplica.

3.5.2. Recta uniformemente carregada paralela a plano condutor ao potencial nulo

Considere-se uma distribuição infinita de carga uniforme paralela ao eixo yy e à distância h do plano $z=0$ ao potencial nulo, com densidade σ_L . O potencial em $z \geq 0$ é independente de y e calcula-se facilmente considerando a "recta imagem" representada na figura:

$$\phi(x, z) = -\frac{\sigma_L}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln\left(\frac{\rho_+}{\rho_-}\right) \right]$$

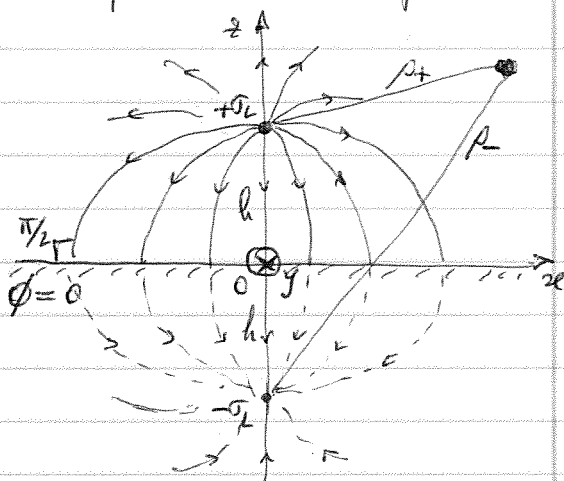
em que $\rho_{\pm}$ são as distâncias às rectas do ponto P em que se calcula

o potencial, sendo $\rho_{\pm}$ distâncias às rectas para as quais o respectivo potencial é tomado como nulo. Neste caso, fazendo $\rho_+ = \rho_- = h$, vem:

$$\phi(x, z) = -\frac{\sigma_L}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho_+}{\rho_-}\right)$$

Para $\rho_+/\rho_- = 1$ (plano $z=0$), resulta $\phi=0$; logo, esta equipotencial da "problema análogo" coincide com o plano condutor ao potencial nulo do "problema original".

Assim, a solução obtida é a solução do problema para



$z \geq 0$ (mas não para $z < 0$, onde não há campo no "problema original").

O campo eléctrico calcula-se por $\vec{E} = -\nabla\phi = -\left[\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}\right]$, verificando-se facilmente que é normal ao plano condutor.

$$\vec{E}(x, z > 0) = E_z(x)\hat{z} = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=0}\hat{z}.$$

Pode, então, calcular-se a densidade de carga no plano condutor, $\sigma_s(x) = \epsilon_0 E_z(x)$: $\sigma_s(x) = -\frac{\sigma_L h}{\pi(x^2 + h^2)}$

Novamente, e por "influência electrostática", é acumulada carga, com distribuições não-uniformes, no plano condutor, de sinal contrário ao de σ_L , onde terminam as linhas de força do campo eléctrico. A carga total vale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_s(x) dx = -\frac{\sigma_L h}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + h^2} = -\frac{\sigma_L h}{\pi} \cdot \frac{1}{h} \arctan \frac{x}{h} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = -\sigma_L$$

As superfícies equipotenciais são determinadas por $\phi/\rho = \text{const.}$;

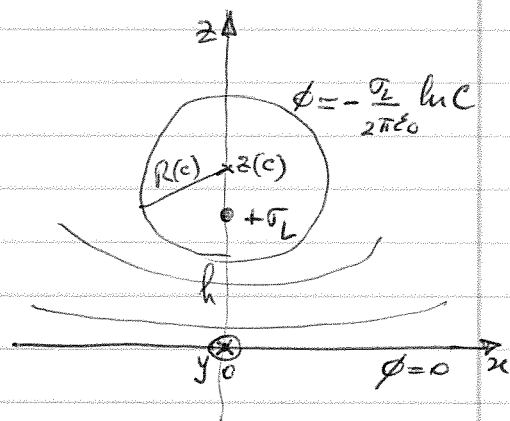
$$\text{como: } \begin{cases} \rho_+^2 = x^2 + (z-h)^2 \\ \rho_-^2 = x^2 + (z+h)^2 \end{cases}$$

$$\text{vem: } x^2 + z^2 + h^2 - 2zh = C^2 (x^2 + z^2 + h^2 + 2zh)$$

$$\text{ou } x^2 + z^2 - 2zh = h^2 \left(\frac{C^2 - 1}{C^2 + 1} \right) \quad (C: \text{constante})$$

Seu $C < 1$, trata-se de esferas geradas por circunferências rodando a posição da recta de carga, com centro no eixo zz e raio dados por, respectivamente:

$$\begin{cases} z(c) = h \left(1 + \frac{2C^2}{1-C^2} \right) \\ R(c) = \frac{2C}{1-C^2} h \end{cases}$$



A força, por unidade de comprimento, sobre a recta carregada é a dada $\vec{z}$ "recta imagem".

3.6.3 Recta uniformemente carregada paralela a cilindro condutor ao potencial nulo

Calcula-se, em primeiro lugar, o potencial devido a duas rectas paralelas carregadas com densidades lineares de carga $\pm\sigma_L$, na geometria indicada na figura. Resulta

directamente: $\phi(x,y) = -\frac{\sigma_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{y^2 + (x+h)^2}{y^2 + (x-h)^2} \right]^{1/2}$

(ver ...). As linhas equipotenciais são dadas por:

$$\frac{y^2 + (x+h)^2}{y^2 + (x-h)^2} = C \quad \left(C = e^{-\frac{4\pi\epsilon_0\phi}{\sigma_L}} \right)$$

ou, reescrevendo, $\left[x - \frac{h(1+C)}{C-1} \right]^2 + y^2 = \frac{4Ch^2}{(1-C)^2}$, que é a

equação de uma circunferência com raio e centro dados por

$$\begin{cases} R_c = \frac{2h\sqrt{C}}{|1-C|} \\ x_c = \frac{h(1+C)}{C-1}, \quad y_c = 0 \end{cases}$$

Para $C=1$, resulta o plano $x=0$, de potencial nulo; para $0 \leq C < 1$, são geradas as linhas equipotenciais no semi-espaço $x \leq 0$, e para $1 \leq C$ resultam circunferências no semi-espaço $x \geq 0$.

O campo eléctrico é dado por:

$$\vec{E} = -\nabla\phi = \frac{\sigma_L}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{2h(y^2 + h^2 - x^2)\hat{x} - 4hxy\hat{y}}{[y^2 + (x+h)^2][y^2 + (x-h)^2]} \right\}$$

Seja agora uma recta carregada $(+\sigma_L)$ à distância d do eixo de uma superfície cilíndrica condutora de raio R ao potencial $\phi(C)$.

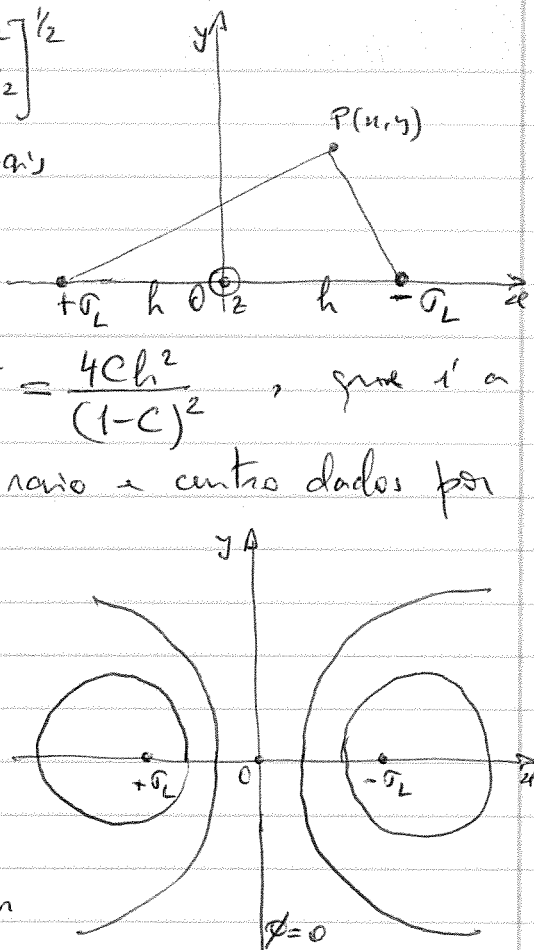
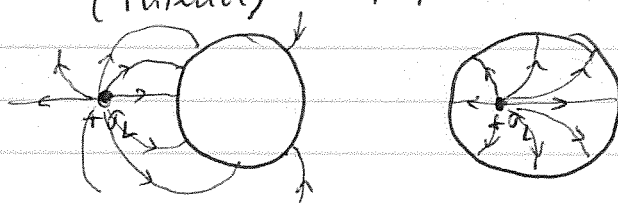
Considerando os resultados anteriores, a equipotencial corresponde à recta carregada $(+\sigma_L)$ e a uma sua imagem $(-\sigma_L)$ como sistema de cargas, tais que

$$\begin{cases} R = \frac{2h\sqrt{C}}{|1-C|} \\ \pm h + \frac{h(1+C)}{C-1} = d \end{cases}$$

Donde:
$$\begin{cases} C = \left(\frac{d^2}{R^2} \right) \pm 1 \\ h = \pm \frac{d^2 - R^2}{2d} \end{cases}$$

(sinais $(\pm)$ para recta $+\sigma_L$ no (exterior) do cilindro; $1 \leq C$)

(validade do cilindro, respectivamente, no (exterior) (interior) da superfície cilíndrica)



A distância da "recta-imagem" ($-Q_L$) ao eixo do cilindro é

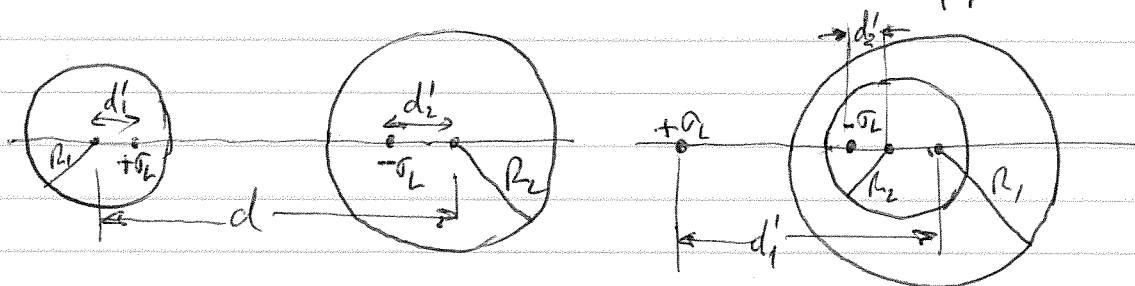
$$d' = \frac{h(1+C)}{C-1} \mp h = \frac{R^2}{d}$$

A força por unidade de comprimento sobre o cilindro resulta do campo da "recta-imagem", e vale:

$$\frac{F}{L} = - \frac{Q_L^2}{2\pi\epsilon_0(d-d')} = - \frac{Q_L^2 d}{2\pi\epsilon_0(d^2 - R^2)}$$

3.5.4. Superfícies cilíndricas condutoras carregadas, com eixos paralelos

Dois superfícies cilíndricas condutoras, com eixos paralelos à distância d e raios R_1 e R_2 , estão carregadas com cargas de densidades lineares simétricas $\pm Q_L$. As superfícies cilíndricas podem ser exteriores uma à outra, ou uma pode ser interior à outra, como mostram as figuras.

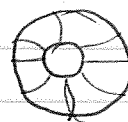


Usando rectas carregadas ($\pm Q_L$) a distâncias d'_1 e d'_2 dos eixos das superfícies cilíndricas, como se indica nas figuras, sendo

$$\begin{cases} d'_1 = \frac{R_1^2}{d \mp d'_2} \\ d'_2 = \pm \frac{R_2^2}{d - d'_1} \end{cases}$$

(sinal superior para a 1ª situação, e sinal inferior para a 2ª situação; cilindro maior, respectivamente, no "exterior" ou no "interior"

ou, resumindo:



de R_2)

$$\left[d'_1^2 - \frac{(d^2 - R_2^2 + R_1^2)}{d} d'_1 + R_1^2 = 0 \right.$$

$$\left[d'_2^2 \mp \frac{(d^2 - R_1^2 + R_2^2)}{d} d'_2 + R_2^2 = 0 \right. \quad , \text{ cuja solução é}$$

$$d'_2 = \pm \frac{(d^2 - R_1^2 + R_2^2)}{2d} - \left[\left(\frac{(d^2 - R_1^2 + R_2^2)}{2d} \right)^2 - R_2^2 \right]^{1/2}$$

$$d'_1 = \frac{(d^2 + R_1^2 - R_2^2)}{2d} \mp \left[\left(\frac{(d^2 + R_1^2 - R_2^2)}{2d} \right)^2 - R_1^2 \right]^{1/2}$$

o problema resume-se à especificação do potencial devido às duas "rectas-imagens". A força atractiva, por

unidade de comprimento axial, sobre cada superfície cilíndrica carregada é agora fácil de calcular através da interação entre as duas "rectas imagem".

O campo eléctrico resulta de $\vec{E} = -\nabla\phi$, e o seu valor na superfície dos cilindros determina as respectivas densidades superficiais de carga (não-uniformes sobre as superfícies).

3.5.5. Carga pontual no exterior de uma esfera condutora

Uma carga pontual q é colocada à distância h do centro O de uma esfera condutora de raio a . A superfície da esfera é uma equipotencial, que será $\phi=0$ supondo a esfera ligada à terra.

O problema tem simetria em torno do eixo zz em que se situa a carga, ou seja, $\phi(r, \theta)$ em coordenadas esféricas. Como "problema análogo", considera-se duas cargas pontuais, como mostra a figura. O potencial criado por estas cargas é dado por

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R} + \frac{q'}{R'} \right)$$

em que, considerando os triângulos não-rectângulos POq e POq' ,

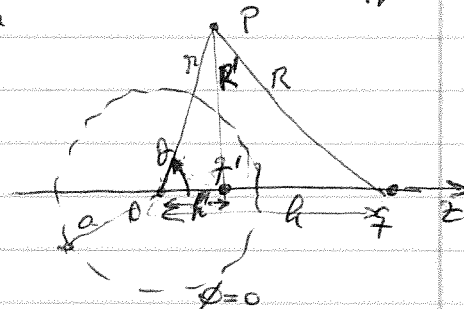
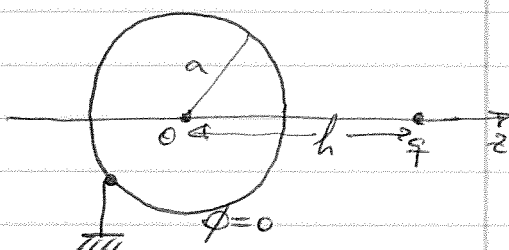
$$\begin{aligned} R &= \sqrt{r^2 + h^2 - 2rh \cos\theta} \\ R' &= \sqrt{r^2 + h'^2 - 2rh' \cos\theta} \end{aligned}$$

Na superfície esférica de raio a , vem:

$$\phi(r=a, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{a^2 + h^2 - 2ah \cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{a^2 + h'^2 - 2ah' \cos\theta}} \right)$$

fazendo:
$$\left[\begin{aligned} q' &= -\frac{a}{h} q \\ h' &= \frac{a^2}{h} \end{aligned} \right]$$

verifica-se que $\phi(r=a, \theta) = 0$, ou seja, que existe uma superfície equipotencial ($\phi=0$) coincidente com a superfície esférica do condutor, cujo potencial é nulo também. Encontram-se, assim, a solução do problema electrostático no exterior da esfera, através do potencial criado pela carga q e pela sua "carga imagem" q' . A solução não é válida no interior da esfera (em que o potencial

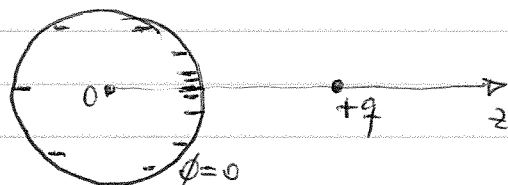


ϵ' é igual ao da superfície, e o campo elétrico é nulo, no "problema original" mas não no "problema análogo". Assim, para $r > a$:

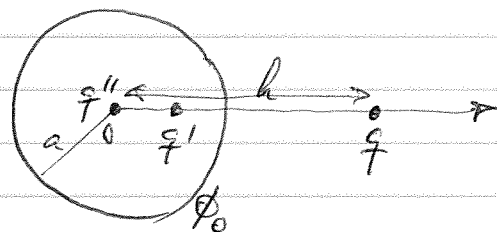
$$\phi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2 - 2rh\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 \left(\frac{h}{a}\right)^2 + a^2 - 2rh\cos\theta}} \right]$$

O campo elétrico pode ser calculado, em coordenadas esféricas, por: $\vec{E}(r, \theta, \phi) = -\nabla\phi(r, \theta) = -\frac{\partial\phi}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \hat{\theta}$.

Pode verificar-se que o campo na superfície da esfera é puramente normal, e calcular a densidade superficial de carga na esfera: $\sigma'_s(r=a, \theta) = -\epsilon_0 (\partial\phi/\partial r)|_{r=a}$. A carga total na esfera vale q' , o que se pode confirmar calculando $\int_{\text{Sup. Esférica}} \sigma'_s(r=a, \theta) 2\pi r^2 \sin\theta d\theta$. Note-se que σ'_s varia com θ , como seria de esperar, devido à influência eletrostática de q , que provoca uma deslocação de cargas de sinal oposto da terra, e que se distribuem não-uniformemente sobre a superfície esférica, de modo a assegurar nesta um potencial constante e nulo.



Se o potencial da esfera não for nulo, $\phi(r=a, \theta) = \phi_0$, o potencial em $r > a$ pode ainda ser calculado, usando o resultado anterior e o princípio de superposição. Como se viu, q e q' asseguram $\phi(r=a, \theta) = 0$; colocando uma carga pontual q'' no centro da esfera (0), mantém-se a superfície esférica $r=a$ como equipotencial, mas altera-se o valor do potencial, devendo verificar-se: $\phi_0 = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 a}$



Assim, a "configuração análoga" é constituída pelas cargas pontuais q , q' e q'' . A carga q'' corresponde uma densidade superficial constante na esfera, $\sigma''_s = \frac{q''}{4\pi a^2}$, que se sobrepõe ao valor σ'_s . A densidade total vale: $\sigma_{\text{total}}(r=a, \theta) = \sigma'_s(r=a, \theta) + \sigma''_s$

e a carga total da esfera é $q_{\text{total}} = q' + q''$.

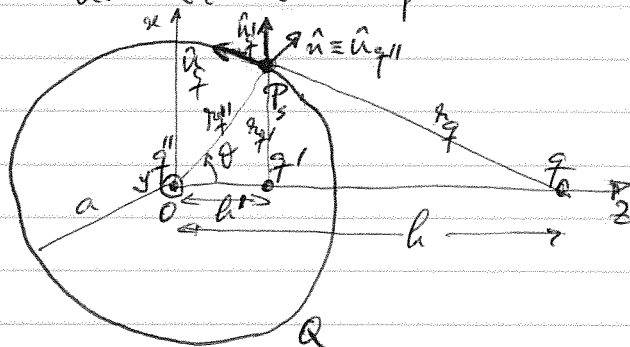
Analogamente, se a esfera estiver descarregada ($q_{\text{total}} = 0$) e isolada ($\phi(r=a)$ não definido), o problema

exterior ainda se resolve com cargas q, q' e q'' , sendo neste caso $q'' = -q'$. O potencial na superfície da esfera vale, então: $\phi(r=a) = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 a}$.

O cálculo da densidade de carga σ_s de uma esfera condutora com carga total Q e raio a , na presença de uma carga pontual exterior q à distância $h > a$ do centro da esfera, pode agora ser desenvolvido a partir da análise anterior. O campo

elétrico na superfície da esfera é normal à superfície, $\vec{E} = E(a)\hat{n}$, e resulta da sobreposição dos campos das três cargas pontuais, sendo:

$$\begin{cases} Q = q' + q'' \\ q' = -\frac{a}{h} q \\ h' = a^2/h \end{cases}$$



Apenas as componentes dos campos normais à superfície $r=a$ são relevantes, donde:

$$4\pi\epsilon_0 E(a) = \frac{q}{r_q^2} (\hat{u}_q \cdot \hat{n}) + \frac{q'}{r_{q'}^2} (\hat{u}_{q'} \cdot \hat{n}) + \frac{q''}{a^2}$$

Usando o sistema de eixos representado na figura, com o ponto P_s da superfície situado no plano Oxz , tem-se:

$$\begin{cases} P_s = (a \sin\theta, 0, a \cos\theta) \\ \hat{n} = (\sin\theta, 0, \cos\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{u}_q = \frac{1}{r_q} (a \sin\theta, 0, a \cos\theta - h) \\ \hat{u}_{q'} = \frac{1}{r_{q'}} (a \sin\theta, 0, a \cos\theta - h') \\ \hat{u}_{q''} = \hat{n} \end{cases}$$

e daí:

$$\begin{cases} (\hat{u}_q \cdot \hat{n}) = \frac{1}{r_q} (a - h \cos\theta) \\ (\hat{u}_{q'} \cdot \hat{n}) = \frac{1}{r_{q'}} (a - h' \cos\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_q = \sqrt{a^2 + h^2 - 2ah \cos\theta} \\ r_{q'} = (a/h) r_q \\ r_{q''} = a \end{cases}$$

Atendendo aos valores de q', q'', h' e r_q , resulta após cálculos:

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0 E(a) &= \frac{q}{r_q^3} (a - h \cos\theta) + \frac{q'}{r_{q'}^3} (a - h' \cos\theta) + \frac{q''}{a^2} = \\ &= \frac{Q}{a^2} + \frac{q}{ah} + \frac{q}{h^3} \left[\frac{a [1 - (h/a)^2]}{[1 - 2 \frac{a}{h} \cos\theta + (\frac{a}{h})^2]^{3/2}} \right] \end{aligned}$$

A densidade superficial de carga vale, então: $\sigma = \epsilon_0 E(a)$.

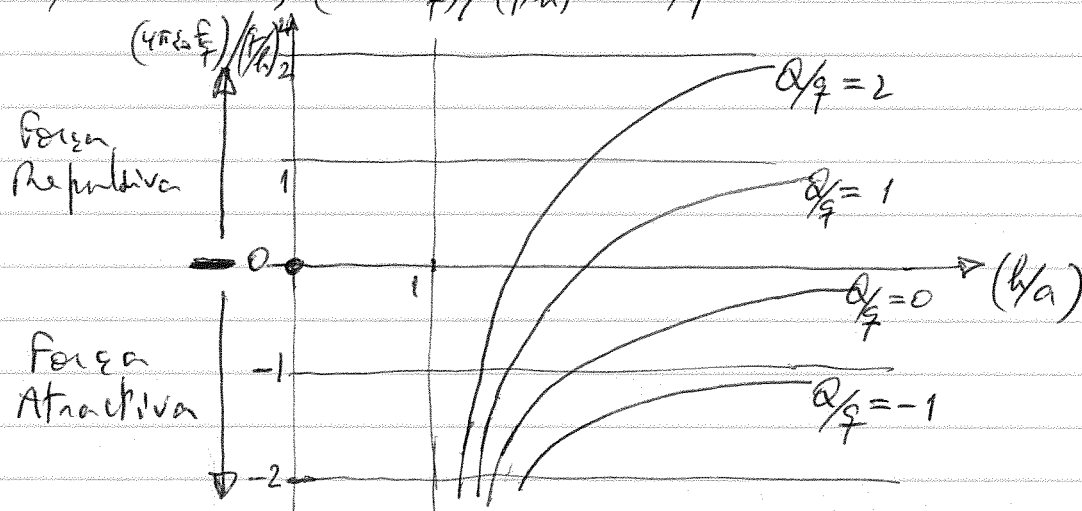
A força sobre a carga pontual q dividida à esfera carregada com a carga Q , $\vec{F}_q = F_q \hat{z}$, calcula-se facilmente:

$$\begin{aligned} F_q &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q''}{h^2} + \frac{q'}{(h-h')^2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 h^2} \left[q'' + \frac{h^2 (-\frac{Q}{h})}{(h - \frac{a^2}{h})^2} \right] = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 h^2} \left[q'' - \frac{Q}{h} \frac{1}{[1 - (a/h)^2]^2} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{h} \right)^2 \left[\frac{Q}{q} + \frac{a}{h} \left[1 - \frac{1}{[1 - (a/h)^2]^2} \right] \right] \end{aligned}$$

A força $\vec{F}_q$ será repulsiva ($F_q > 0$) ou atrativa ($F_q < 0$) dependendo dos valores dos parâmetros (a, h, q e Q). Sejam $Q, q > 0$; na ausência de q , a carga Q distribui-se uniformemente na superfície da esfera, como é óbvio, mas na presença de q a carga total Q redistribui-se. Cria-se uma região próxima de q com densidade superficial de carga tendencialmente negativa (não-uniforme), e uma região afastada com distribuição de carga positiva, como ilustra a figura.

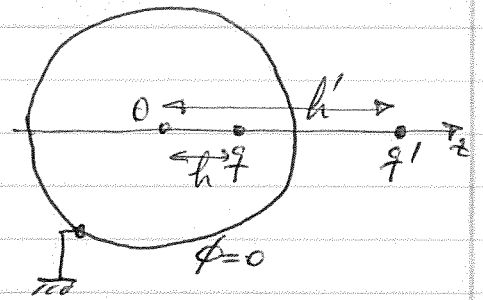
Embora a carga total da esfera (Q) seja positiva, dada a maior proximidade de q ($q > 0$) da região carregada negativamente, pode a força sobre q ser atrativa. A figura mostra o gráfico de $(4\pi\epsilon_0 F_q) / (q/h)^2$ em função de $(h/a) > 1$; para

$$\begin{cases} h/a \rightarrow 1, & (4\pi\epsilon_0 F_q) / (q/h)^2 \rightarrow -\infty \\ h/a \rightarrow \infty, & (4\pi\epsilon_0 F_q) / (q/h)^2 \rightarrow Q/q \end{cases}$$



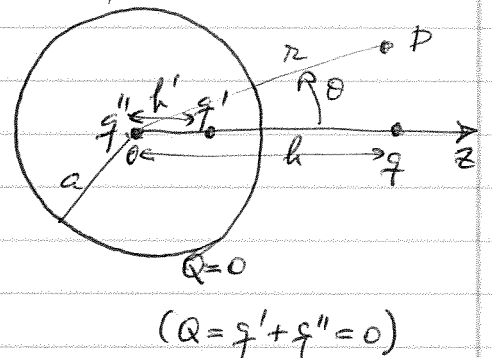
A solução do "problema exterior" ($\phi(r > a)$) conduz imediatamente à solução do "problema interior" ($\phi(r < a)$) representado na figura no caso de $\phi(r=a)=0$. Os papéis das cargas q e q' são agora trocados. A força

semelhante à anteriormente discutida, podem ser analisadas as situações em que a esfera está descarregada e isolada, ou em que está a um certo potencial não-nulo.



3.5.6. Esfera condutora isolada sem carga num campo elétrico uniforme

Os resultados anteriores referentes a uma carga pontual q a distância h do centro de uma esfera condutora de raio a ($a < h$) permitem obter a solução deste problema, fazendo h e q tenderem para infinito mantendo a razão q/h^2 finita e igual a $4\pi\epsilon_0 E_0$, sendo E_0 a grandeza do campo elétrico uniforme $\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$ em que se situa a esfera condutora. O problema resolve-se, como discutido atrás, com as "cargas imagem" q' e q'' ; sendo $q > 0$, resulta $q' < 0$, e $q'' = -q'$. As cargas (q', q'') constituem um dipolo de momento $\vec{p} = -p \hat{z}$, com

$$p = -q'h' = q''h' = q \frac{a^3}{h^2}$$


fazendo $h \rightarrow \infty$, mas mantendo $q/h^2 = 4\pi\epsilon_0 E_0$, verifica-se que p é constante: $p \rightarrow 4\pi\epsilon_0 E_0 a^3$ e o dipolo localiza-se, no limite, no centro da esfera: $h' \rightarrow 0$

Assim, no exterior da esfera, o campo total será o campo $\vec{E}_0$ adicionado do campo do dipolo $\vec{p}$.

O potencial num ponto P exterior à esfera é correspondente ao campo $\vec{E}_0$ será da forma (sendo $E_0 > 0$):

$$\phi_0 = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta \quad (\text{fazendo } \phi_0 = 0 \text{ em } z = 0)$$

O potencial devido ao dipolo na origem vale

$$\phi_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} = E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta$$

Assim, o potencial total em P (r, θ) vale

$$\phi(r, \theta) = E_0 \cos \theta \left(\frac{a^3}{r^2} - r \right)$$

sendo nulo para $r = a$.

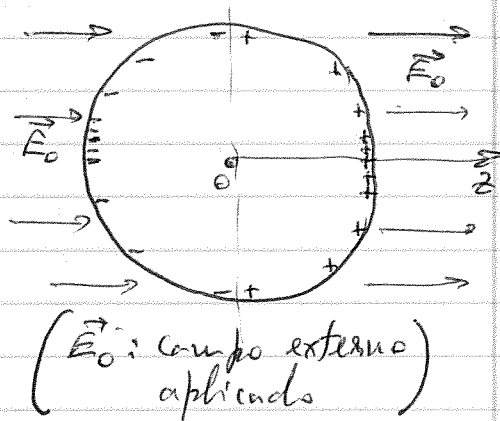
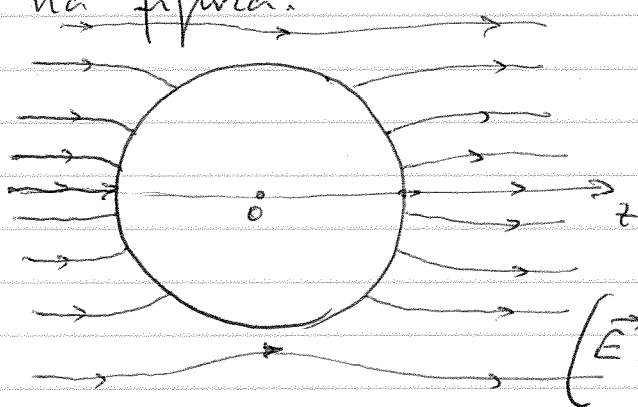
O campo elétrico na superfície da esfera é obviamente radial, $\vec{E} = E(a, \theta) \hat{r}$, sendo

$$E(a, \theta) = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_{r=a} = E_0 \cos \theta \left[1 + 2 \frac{a^3}{r^3} \right]_{r=a} = 3 E_0 \cos \theta$$

Daí que a densidade superficial de carga na esfera seja

$$\sigma_s(\theta) = \epsilon_0 E(a, \theta) = 3 \epsilon_0 E_0 \cos \theta$$

A esfera fica com uma distribuição de carga superficial como se ilustra na figura.



($\vec{E}_0$: campo externo aplicado)

($\vec{E}(r, \theta)$: campo total)

3.1. Método de separação de variáveis: coordenadas cartesianas

Em muitas situações, as cargas elétricas estão distribuídas apenas nas interfaces entre meios materiais, não existindo distribuições volumicas de carga. Assim, no espaço entre essas fronteiras, o potencial elétrico deve verificar a equação de Laplace, $\nabla^2 \phi = 0$.

Assuma-se, no tratamento seguinte, que as distribuições de carga ocorrem na superfície de condutores, separados pelo vácuo (ϵ_0). Abordagens semelhantes, em problemas envolvendo meios materiais (permissividade elétrica $\epsilon \neq \epsilon_0$) e meios magnéticos, serão tratadas em capítulos posteriores.

A solução ϕ da equação de Laplace e que verifica as condições fronteira nas superfícies carregadas pode ser procurada usando o método de separação de variáveis em problemas em que essas condições fronteira verificam certas condições de simetria. Atendendo à propriedade dessas condições fronteira, sua aplicação a utilização alternativa de sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas ou esféricas, em que a função potencial ϕ se expressa, respectivamente, como