

2.9. Exemplos de solução das equações de Laplace e de Poisson

Em situações simples, em que a gran de simetria do problema é chavado, a integração das equações de Laplace ou Poisson é fácil, como se mostra com os seguintes exemplos.

— Condensador plano infinito

Considera-se um condensador plano infinito, com armaduras espaçadas de d , sujeitas a uma diferença de potencial ϕ_0 , como se ilustra na figura, onde se representa um referencial apropriado.

Por simetria, tem-se $\phi = \phi(x)$,

donde a equação de Laplace reduz-se a $\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$, sendo a respectiva solução

$$\phi(x) = C_1 x + C_2 \quad (C_{1,2}: \text{constantes})$$

As constantes são determinadas pelas condições fronteira (nesse caso no potencial):

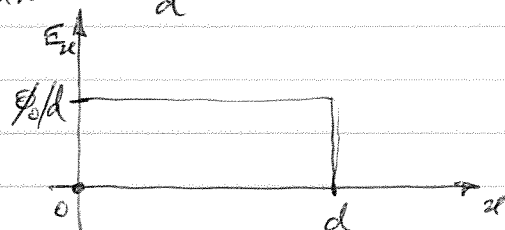
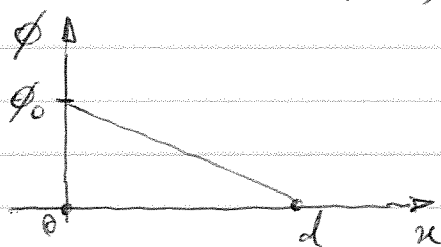
$$\begin{cases} \phi(0) = C_2 = \phi_0 \\ \phi(d) = C_1 d + C_2 = 0 \end{cases}$$

resulta, então:

$$\phi(x) = \frac{\phi_0}{d} (d - x), \quad 0 < x < d$$

O campo eléctrico vale, portanto:

$$\vec{E} = E_x(x) \hat{x} = - \frac{d\phi}{dx} \hat{x} = \frac{\phi_0}{d} \hat{x}$$



Se as fixadas condições fronteira na densidade de carga:

$$\begin{cases} \sigma_s(0) = +\sigma_0 \\ \sigma_s(d) = -\sigma_0 \end{cases}$$

como $\phi(x) = C_1 x + C_2$, resulta que $E_x(x) = -C_1$, e vem:

$$\begin{cases} \vec{E}(0) = E_x(0) \hat{x} = (+\sigma_0/\epsilon_0) \hat{x} = -C_1 \hat{x} \\ \vec{E}(d) = E_x(d) \hat{x} = (-\sigma_0/\epsilon_0) (-\hat{x}) = -C_1 \hat{x} \end{cases}$$

Donde:

$$\phi(x) = - \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} x + C_2$$

Se se fixar o potencial de uma das armaduras (por

exemplo, $\phi(d) = 0$ como acima representado), vem:

$$\phi(d) = -\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} d + C_2 = 0$$

donde:

$$C_2 = (\sigma_0/\epsilon_0) d$$

e logo

$$\phi(x) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} (d-x)$$

Identificando as duas soluções $\phi(x)$ obtidas, verifica-se que seia'

$$\sigma_0/\epsilon_0 = \phi_0/d$$

— Condensador plano infinito com distribuição de carga interior

Seja um condensador plano infinito com armaduras normais ao eixo x , situadas em $x=0, d$, e com o volume interior preenchido por uma distribuição de carga de densidade volumica σ_v .

No espaço entre as armaduras deve verificar-se a equação de Poisson, que se escreve (atendendo à simetria do problema):

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{\sigma_v}{\epsilon_0}$$

Donde a solução na forma: $\phi(x) = -\frac{\sigma_v}{2\epsilon_0} x^2 + C_1 x + C_2$ ($C_{1,2}$: constantes)

Fixando condições fronteiras nos potenciais: $\begin{cases} \phi(0) = \phi_0 \\ \phi(d) = 0 \end{cases}$

resultam os valores das constantes: $\begin{cases} C_1 = \frac{\sigma_v}{2\epsilon_0} d - \frac{\phi_0}{d} \\ C_2 = \phi_0 \end{cases}$

donde $\phi(x) = \frac{\phi_0}{d} (d-x) + \frac{\sigma_v}{2\epsilon_0} (dx - x^2)$

O campo eléctrico correspondente é $\vec{E} = E_x(x) \hat{x} = -\frac{d\phi}{dx} \hat{x}$:
 $E_x(x) = \frac{\phi_0}{d} - \frac{\sigma_v}{\epsilon_0} (d-x)$

No exterior do condensador ($x < 0$ e $x > d$) aplica-se a equação de Laplace ($\sigma_v = 0$): $\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$

Donde:

$$\begin{cases} \phi(x) = C_3 x + C_4 & (x > d) \\ \phi(x) = C_5 x + C_6 & (x < 0) \end{cases} \quad (C_3, \dots, C_6 : \text{constantes})$$

Pela continuidade de $\phi(x)$ em $x=0, d$: $\begin{cases} C_4 = \phi_0 \\ C_5 d + C_6 = 0 \end{cases}$

O campo elétrico nessas regiões será: $\begin{cases} E_x(x) = -C_3 & (x > d) \\ E_x(x) = -C_5 & (x < 0) \end{cases}$

Se se fixar campo nulo no exterior das armaduras, $C_3 = C_5 = 0$.
Então, existirão densidades superficiais de carga nas armaduras, de acordo com as descontinuidades do campo elétrico:

$$\begin{cases} E_x(0^-) = 0 \\ E_x(0^+) = \frac{\phi_0}{d} - \frac{\sigma_v}{2\epsilon_0} d \end{cases} \quad \begin{cases} E_x(d^-) = \frac{\phi_0}{d} + \frac{\sigma_v}{2\epsilon_0} d \\ E_x(d^+) = 0 \end{cases}$$

Essas densidades superficiais de carga serão, então:

$$\begin{cases} \sigma_s(0) = \epsilon_0 \left(\frac{\phi_0}{d} - \frac{\sigma_v}{2\epsilon_0} d \right) \\ \sigma_s(d) = -\epsilon_0 \left(\frac{\phi_0}{d} + \frac{\sigma_v}{2\epsilon_0} d \right) \end{cases}$$

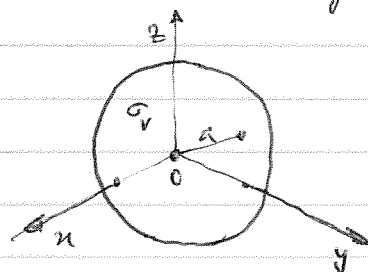
Resulta, então:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \begin{cases} \phi_0 & , x < 0 \\ \frac{\phi_0}{d}(d-x) + \frac{\sigma_v}{2\epsilon_0}(dx - x^2) & , 0 < x < d \\ 0 & , x > d \end{cases} \\ E_x(x) &= \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{\phi_0}{d} - \frac{\sigma_v}{2\epsilon_0}(d-2x) & , 0 < x < d \\ 0 & , x > d \end{cases} \end{aligned}$$

De notar que todas as quantidades ($\phi(x)$, $E_x(x)$, $\sigma_s(0)$, $\sigma_s(d)$) resultam da sobreposição respectiva das quantidades correspondentes, separadamente, às armaduras carregadas e à carga distribuída em volume.

— Esfera carregada uniformemente

Seja uma esfera de raio a , centrada na origem O e carregada uniformemente com uma densidade volumétrica de carga σ_v .
O problema tem, obviamente, simetria esférica: $\begin{cases} \phi = \phi(r) \\ \vec{E} = E_r(r) \hat{r} \end{cases}$



⇒ $r > a$: Aplicar a equação de Laplace ($\sigma_v = 0$), que se escreve (ver Apêndice...): $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 0$

Donde, integrando: $\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 0$, ou $\frac{d\phi}{dr} = \frac{C_1}{r^2}$, donde

$$\begin{cases} \phi(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2 \\ E_r(r) = -\frac{C_1}{r^2} \end{cases}$$

Como $\phi(r \rightarrow \infty) = 0$, vem $C_2 = 0$.

⇒ $r < a$: Recorre-se à equação de Poisson ($\sigma_v \neq 0$), donde

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = -\frac{\sigma_v}{\epsilon_0}$$

Assim: $\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = -\frac{\sigma_v}{\epsilon_0} r^2$, ou $r^2 \frac{d\phi}{dr} = -\frac{\sigma_v}{3\epsilon_0} r^3 + C_3$

donde:
$$\begin{cases} \phi(r) = -\frac{\sigma_v}{6\epsilon_0} r^2 - \frac{C_3}{r} + C_4 \\ E_r(r) = \frac{\sigma_v}{3\epsilon_0} r - \frac{C_3}{r^2} \end{cases}$$

Como $E_r(r=0)$ deve ser finito e único, então $C_3 = 0$. Vem:

$$\begin{cases} \phi(r > a) = -\frac{C_1}{r} \\ \phi(r < a) = -\frac{\sigma_v}{6\epsilon_0} r^2 + C_4 \end{cases} \quad \begin{cases} E_r(r > a) = -\frac{C_1}{r^2} \\ E_r(r < a) = \frac{\sigma_v}{3\epsilon_0} r \end{cases}$$

Na fronteira $r = a$ não há carga superficial, pelo que o campo eléctrico e o potencial devem ser ambos contínuos:

$$\begin{cases} -\frac{C_1}{a^2} = \frac{\sigma_v}{3\epsilon_0} a \\ -\frac{C_1}{a} = -\frac{\sigma_v}{6\epsilon_0} a^2 + C_4 \end{cases}$$

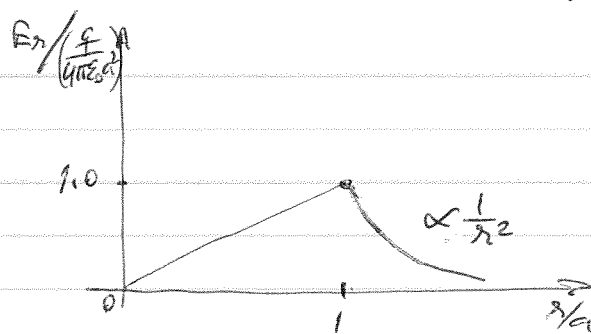
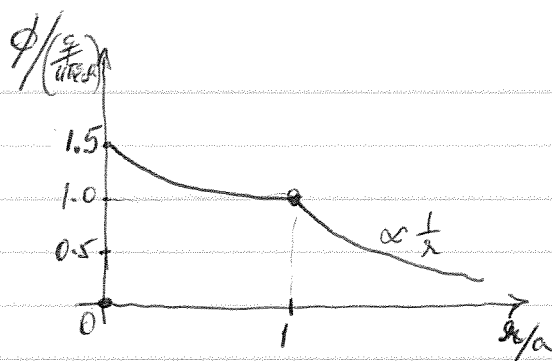
Sendo $q = \left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) \sigma_v$ a carga total da esfera, vem:

$$C_1 = -\sigma_v \left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}$$

$$C_4 = -\frac{C_1}{a} + \frac{\sigma_v}{6\epsilon_0} a^2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{\sigma_v}{6\epsilon_0} a^2 =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} + \sigma_v \left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) \frac{1}{8\pi\epsilon_0 a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \times \frac{3}{2}$$

Donde:
$$\begin{cases} \phi(r > a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \\ \phi(r < a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{a} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{a^2} \right) \end{cases} \quad \begin{cases} E_r(r > a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \\ E_r(r < a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^3} \end{cases}$$



Potencial e densidade de carga de um campo elétrico com simetria cilíndrica

Seja um campo elétrico dado, em coordenadas cilíndricas, por

$$\vec{E} = \begin{cases} E_0 (\rho/a)^3 \hat{\rho} & , 0 \leq \rho < a \\ 0 & , a \leq \rho \end{cases}$$

A densidade volumétrica de carga pode determinar-se pela lei de Gauss: $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\rho) = \begin{cases} \frac{4\rho^2}{a^3} E_0 & , 0 \leq \rho < a \\ 0 & , a \leq \rho \end{cases}$

donde:

$$\nabla_v(\rho) = \begin{cases} \frac{4\varepsilon_0 \rho^2}{a^3} E_0 & , 0 \leq \rho < a \\ 0 & , a \leq \rho \end{cases}$$

A descontinuidade do campo em $\rho = a$ permite calcular a densidade superficial de carga $\sigma_s(\rho=a)$ através da divergência superficial:

$$\hat{n} \cdot [\vec{E}(a^+) - \vec{E}(a^-)] = \hat{\rho} \cdot [0 - E_0 \hat{\rho}] = -E_0$$

donde: $\sigma_s(\rho=a) = -\varepsilon_0 E_0$

A carga total do cilindro de raio a é nula, como teria de ser para se ter um campo nulo no exterior; para uma altura L do cilindro, a carga total vale:

$$q_L = \int_V \rho_v dv + \int_S \sigma_s ds = \frac{4\varepsilon_0 E_0}{a^3} L \int_0^a \rho^2 \cdot 2\pi \rho d\rho + 2\pi a \cdot L \cdot (-\varepsilon_0 E_0) = 0$$

Quanto ao potencial, deverá ser da forma $\phi(\rho)$ por simetria. Para $\rho > a$, e como $\vec{E} = 0$, ϕ é constante; para que $\phi(\rho \rightarrow \infty) = 0$, deve ser $\phi(\rho \geq a) = 0$. Para a região interior:

$$\phi(0) - \phi(\rho) = \int_0^\rho \vec{E}(\rho) \cdot \hat{\rho} d\rho = \frac{E_0}{a^3} \int_0^\rho \rho^3 d\rho = \frac{E_0}{4a^3} \rho^4$$

Como $\phi(a) = 0$, vem $\phi(0) = E_0 a/4$, e então

$$\phi(\rho) = \begin{cases} \frac{E_0 a}{4} \left[1 - \left(\frac{\rho}{a} \right)^4 \right] & , \rho \leq a \\ 0 & , a \leq \rho \end{cases}$$

2.10. Dipolo eléctrico

Seja um dipolo eléctrico constituído pelas cargas pontuais $\pm q$, situadas no eixo zz em $\pm d/2$. O potencial $\phi(\vec{r})$ tem óbvia simetria em torno do eixo zz , ou seja, $\phi = \phi(r, \theta)$, e pode escrever-se directamente

$$\phi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$

sendo: $r_{\pm} \approx r \mp \frac{d}{2} \cos \theta$ ($r \gg d$)

Resulta:

$$\phi(r, \theta) \approx \frac{q d \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Usando a definição de momento dipolar eléctrico

$$\vec{p} = q d \hat{z}$$

vem imediatamente

$$\boxed{\phi(r, \theta) \approx \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}} \quad (r \gg d)$$

As superfícies equipotenciais são facilmente obtidas:

$$r^2 = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 \phi} = C \cos \theta \quad (C: \text{constante})$$

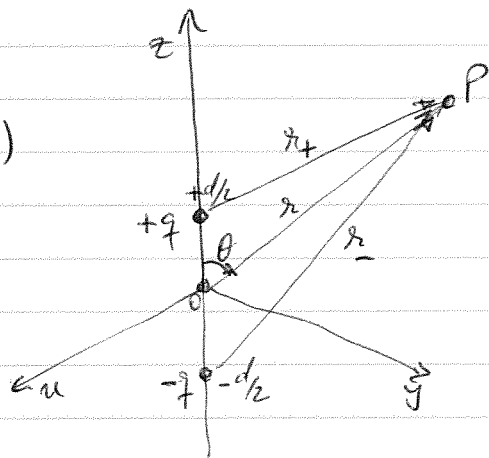
O campo eléctrico do dipolo calcula-se facilmente por $\vec{E} = -\nabla\phi$, em coordenadas esféricas:

$$\left(\text{dipolo } \vec{p} = p \hat{z} \text{ na origem} \right): \begin{cases} E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \approx \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \approx \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} = 0 \end{cases}$$

As linhas de força de $\vec{E}$ são obtidas integrando a expressão

$$d\vec{r} \times \vec{E} = 0, \text{ ou seja: } \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ dr & r d\theta & r \sin \theta d\phi \\ E_r & E_\theta & 0 \end{vmatrix} = 0$$

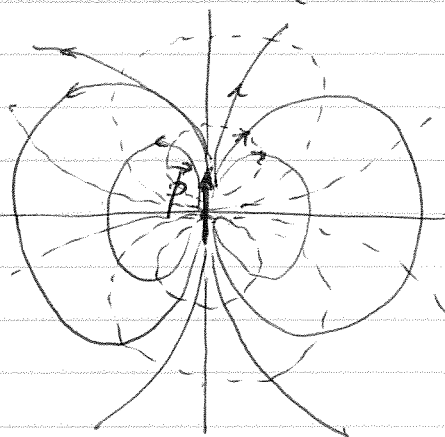
donde resulta $d\phi = 0$ (campo $\vec{E}$ no plano $(\hat{r}, \hat{\theta})$) e



Se $dr = r E_r d\theta$ que, integrada, estabelece a equação das linhas de força do dipolo $\vec{p} = p\hat{z}$:

$$r = C \sin^2 \theta \quad (C: \text{constante})$$

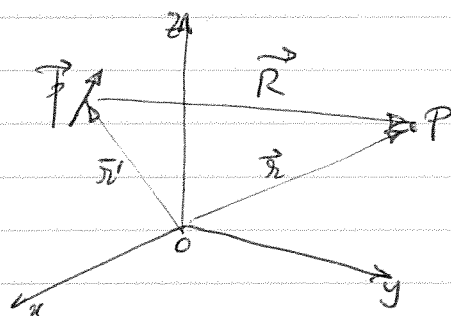
A figura mostra as linhas equipotenciais e as linhas de força do campo elétrico, para o dipolo $\vec{p}$.



Note-se que, dada a invariância da expressão do potencial elétrico do dipolo relativamente ao referencial utilizado, o resultado anteriormente obtido é geral. Assim, atendendo à figura, pode escrever-se

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3}}$$

sendo $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ o vector de posição do ponto P em que se calcula o potencial relativamente à localização do dipolo eléctrico $\vec{p}$.



A expressão geral do campo eléctrico do dipolo resulta de imediato:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla_{\vec{r}} \phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\nabla_{\vec{r}} (\vec{p} \cdot \vec{R})}{R^3} + (\vec{p} \cdot \vec{R}) \nabla_{\vec{r}} \left(\frac{1}{R^3} \right) \right]$$

Sendos (ver Apêndio...) $\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B})$

como $\vec{p}$ é um vector constante e $\nabla_{\vec{r}} \times \vec{r} = 0$, vem:

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{r}} (\vec{p} \cdot \vec{R}) &= (\vec{p} \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{R} = \left(p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (x-x', y-y', z-z') = \\ &= \vec{p} \\ \nabla_{\vec{r}} \left(\frac{1}{R^3} \right) &= -\frac{3}{R^4} \vec{R} \end{aligned}$$

Donde o campo eléctrico de um dipolo eléctrico $\vec{p}$ arbitrário:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^3} [3(\vec{p} \cdot \hat{R}) \hat{R} - \vec{p}]}$$

Sabemos as dependências do potencial e das componentes do campo eléctrico em R^{-2} e R^{-3} , respectivamente, evidenciando um decaimento rápido com a distância ao dipolo por comparação com o caso de uma carga pontual. Note-se, ainda, a

simplicidade do cálculo de $\vec{E}$ a partir de ϕ , por comparação com o cálculo direto de $\vec{E}$ a partir da lei de Coulomb e de aproximações geométricas.

Um dipolo elétrico ideal $\vec{p}$ é o limite de um dipolo real $\vec{p} = qd\hat{p}$ em que $d \rightarrow 0$ mantendo-se $p = qd$ constante.

Um caso importante de dipolo molecular é o da água, representado na figura

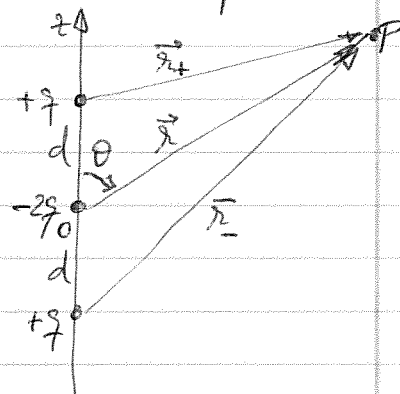
$[p] = \text{C} \cdot \text{m}$ (unidade SI: coulomb x metro, Cm)

Em Física Molecular, é comum usar-se a unidade debye (D), sendo

$$1 \text{ D} = 3.33564 \times 10^{-30} \text{ Cm}.$$

2.11. Quadrupolo elétrico

A figura mostra uma configuração de quadrupolo elétrico, neste caso linear, centrado na origem e alinhado segundo o eixo z , tem como o ponto $P(\vec{r})$ em que se pretende calcular o potencial elétrico, sendo $r \gg d$. Note-se que a carga total do quadrupolo é nula, e o quadrupolo pode ser representado como a sobreposição de dois dipolos lineares alinhados segundo z mas opostos ($\vec{p}_{\pm} = \pm qd\hat{z}$).



O problema tem óbvia simetria em torno do eixo z do quadrupolo linear, e o potencial escreve-se imediatamente como:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_-} - \frac{2}{r} + \frac{1}{r_+} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{r}{r_-} + \frac{r}{r_+} - 2 \right)$$

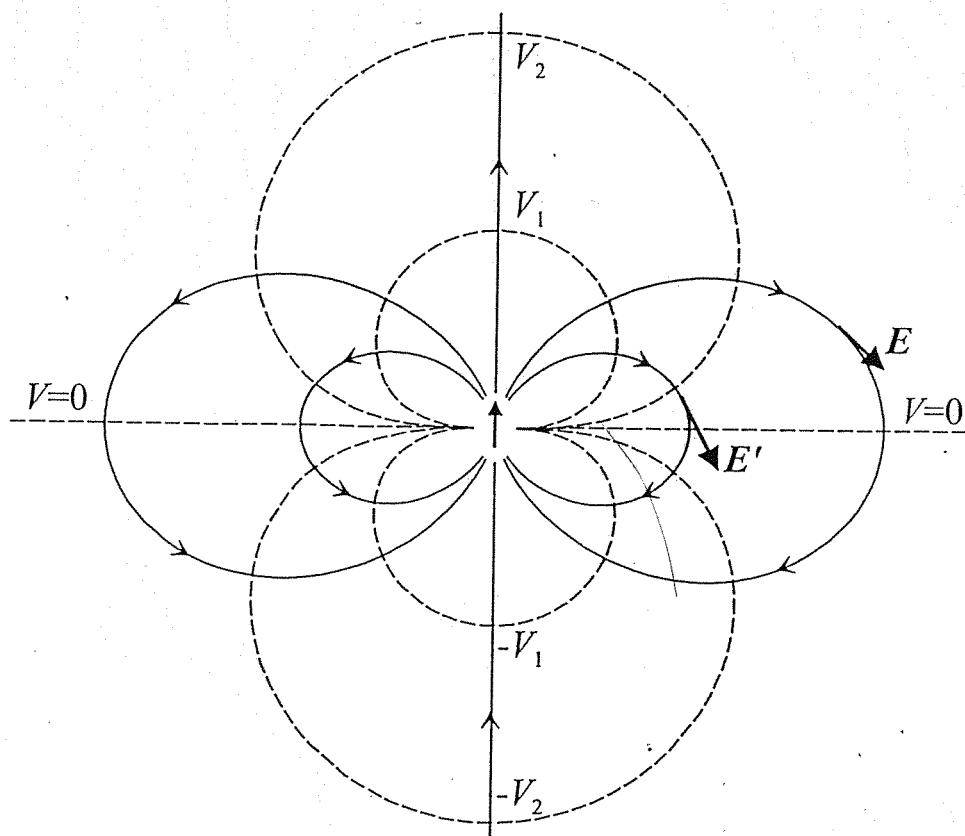
sendo $\vec{r}_{\pm} = \vec{r} \pm d\hat{z}$. Escrevendo, por expansão em série:

$$\frac{r}{r_{\pm}} = 1 \mp \frac{d}{r} \cos\theta + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{r} \right)^2 (3 \cos^2\theta - 1) + \mathcal{O}\left(\frac{d}{r}\right)^3$$

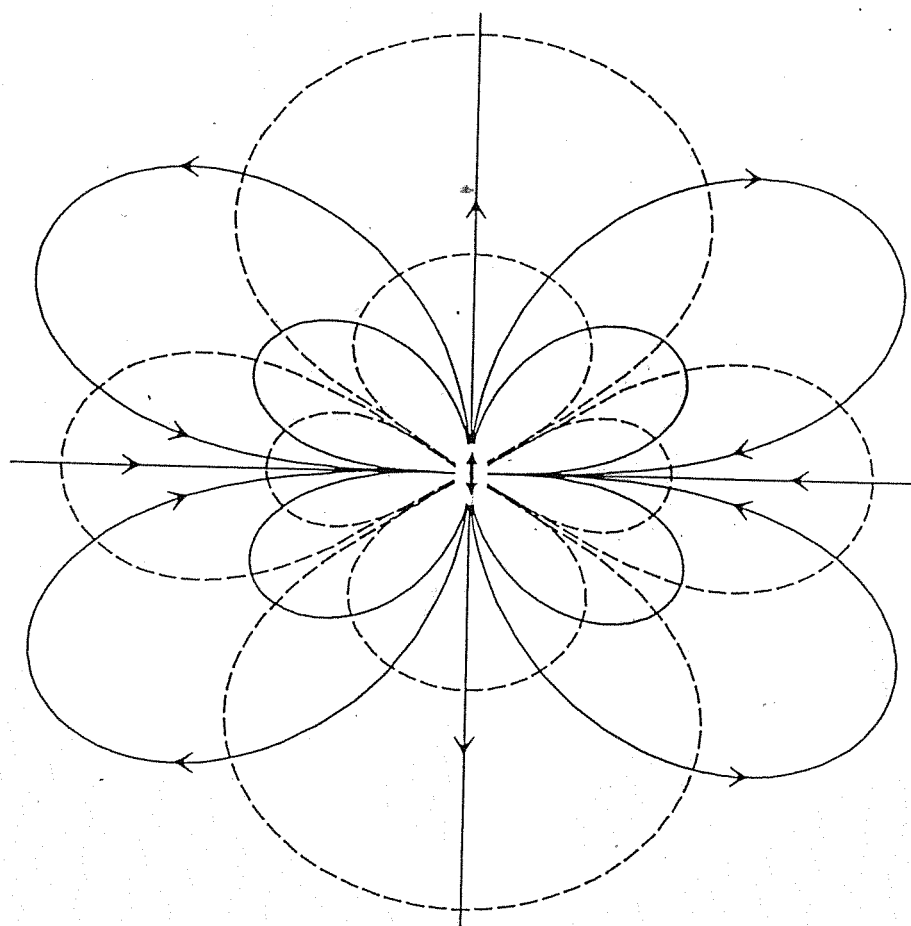
vem:

$$\boxed{\phi(r, \theta) \approx \frac{q d^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos^2\theta - 1)} \quad (r \gg d)$$

em que se desprezam termos de ordem $(d/r)^4$ e ordens pares superiores (os termos de ordem ímpar são nulos). Note-se a ausência das contribuições monopolar (em r^{-1}) e dipolar (em r^{-2}) para o potencial, de acordo com ser nula a carga total da distribuição de carga, bem como o seu momento dipolar total. Resta, como primeira contribuição



DIPOLLO

QUADRUPOLO
LINEAR

para $\phi(\vec{r})$, a expressão atrás calculada, com dependência em $\vec{r}^{-3}$.

As superfícies equipotenciais são dadas por

$$r^3 = C (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (C: \text{constante})$$

O campo elétrico esmace- π , em coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{3q d^2}{4\pi\epsilon_0 r^4} (3 \cos^2 \theta - 1) \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{3q d^2}{4\pi\epsilon_0 r^4} (2 \sin \theta \cos \theta) \\ E_\phi = 0 \end{cases}$$

As respectivas linhas de força são obtidas da solução de $d\vec{r} \times \vec{E} = 0$:

$$\begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ dr & r d\theta & r \sin \theta d\phi \\ E_r & E_\theta & 0 \end{vmatrix} = 0$$

donde: $E_\theta dr = r E_r d\theta$. Substituindo as respectivas expressões:

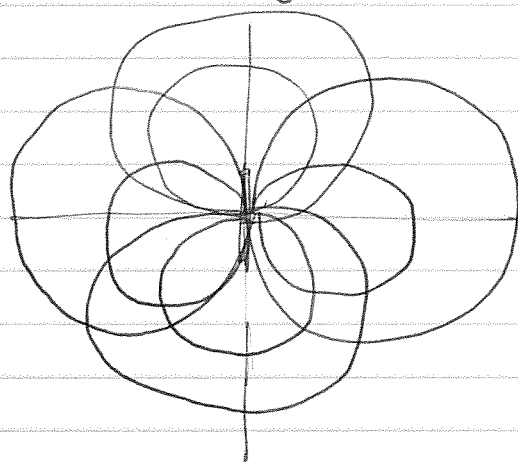
$$\frac{dr}{d\theta} = r \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos \theta \sin \theta} = \frac{r}{2} \left(\frac{2 \cos^2 \theta - 1}{\cos \theta \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)$$

$$\text{Integrando: } \ln r = \frac{1}{2} \left[\ln(\cos \theta \sin \theta) + \ln(\sin \theta) \right] + \frac{1}{2} \ln C$$

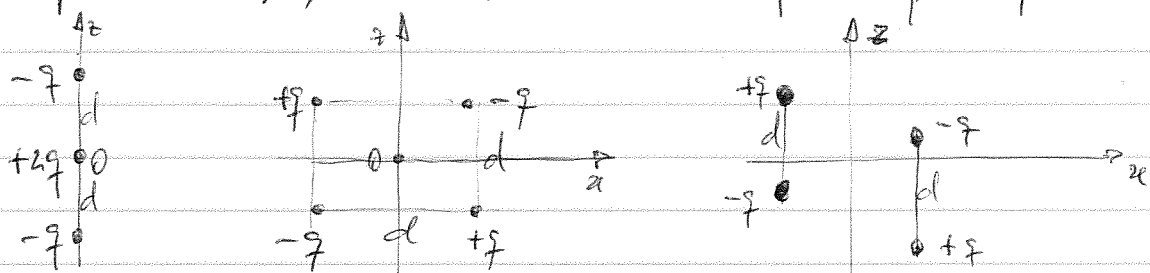
ou, equivalentemente:

$$r^2 = C \cos \theta \sin^2 \theta$$

A figura mostra as linhas de força de $\vec{E}$ e as linhas equipotenciais do quadrupolo linear.



Outras configurações de quadrupolos elétricos são possíveis, tal como se ilustra na figura, em que a carga total e o momento dipolar total são ambos nulos, verificando-se ainda uma dependência em $\vec{r}^{-3}$ da primeira contribuição para o potencial ϕ , como atrás calculado para o quadrupolo linear.

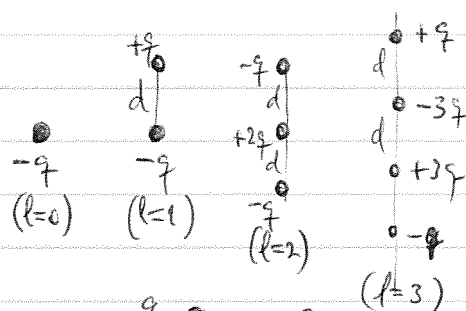


O quadrupolo linear pode ser gerado a partir de um dipolo $\vec{p}$, gerando um segundo dipolo $\vec{p}$ que é transladado de

uma distância d e invertidos, e sobrepondo os dois dipolos.

Aplicando uma regra semelhante, pode obter-se um octopolo linear ou, mais geralmente, um multipolo linear de ordem 2^l através de l deslocamentos (2^l é o número de vezes que a carga $\pm q$ surge na distribuição multipolar; ex: para $l=0$, a carga total do multipolo é uma).

Um arranjo de dipolos opostos com o da figura resulta num octopolo, cujo potencial decora como $\frac{1}{r^4}$.



2.12. Expansão multipolar do potencial eléctrico

Seja agora uma distribuição arbitrária de cargas pontuais q_k situadas em $\vec{r}'_k$ ($k=1, 2, \dots, N$), e o potencial $\phi(\vec{r})$ no ponto P :

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{|\vec{r} - \vec{r}'_k|}$$

Se a extensão da distribuição de carga muito inferior à distância de P a essa distribuição de carga

($|\vec{r} - \vec{r}'_k|_{\min} \gg |\vec{r}'_k - \vec{r}'_j|_{\max}$; e' normal situar a origem do sistema coordenado $Oxyz$ no interior do volume em que se situam as cargas, e então vale $|\vec{r}'_k|_{\max} \ll |\vec{r}|$),

$$\text{Então: } |\vec{r} - \vec{r}'_k|^{-1} = [(\vec{r} - \vec{r}'_k) \cdot (\vec{r} - \vec{r}'_k)]^{-1/2} = [r^2 + r_k'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'_k]^{-1/2} =$$

$$= r^{-1} \left[1 + \left(\frac{r_k'^2}{r^2} - 2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'_k}{r^2} \right) \right]^{-1/2} =$$

$$= r^{-1} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{r_k'^2}{r^2} - 2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'_k}{r^2} \right] + \frac{3}{8} \left[\dots \right]^2 - \frac{5}{16} \left[\dots \right]^3 + \dots \right\}$$

Daqui resulta que $\phi(\vec{r})$ se pode escrever como uma soma de contribuições; escrevendo $\vec{r} \cdot \vec{r}'_k = r r'_k \cos \theta_k$, vem:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[\frac{1}{r} \sum_{k=1}^N q_k \right] + \left[\frac{1}{r^2} \sum_{k=1}^N q_k r'_k \cos \theta_k \right] + \left[\frac{1}{r^3} \sum_{k=1}^N q_k r_k'^2 \frac{(3 \cos^2 \theta_k - 1)}{2} \right] + \dots \right\}$$

Introduzindo os polinómios de Legendre $P_n(\xi)$, com

$$P_n(\xi) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\xi^n} (\xi^2 - 1)^n \quad (\text{n inteiro})$$

$$\left[\begin{array}{ll} P_0(\xi) = 1 & P_3 = \frac{1}{2} (5\xi^3 - 3\xi) \\ P_1(\xi) = \xi & P_4 = \frac{1}{8} (35\xi^4 - 30\xi^2 + 3) \\ P_2(\xi) = \frac{1}{2} (3\xi^2 - 1) & P_5 = \frac{1}{8} (63\xi^5 - 70\xi^3 + 15\xi) \end{array} \right]$$

Verifica-se a fórmula de recorrência
 $(n+1)P_{n+1}(\xi) = (2n+1)\xi P_n(\xi) - nP_{n-1}(\xi)$

faz-se $[\xi = \cos \theta]$, e pode mostrar-se que ϕ se pode escrever segundo a expansão multipolar seguinte:

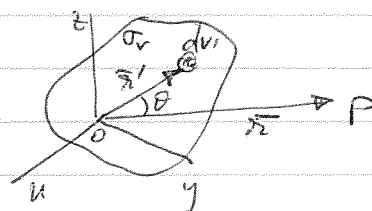
$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \left[\sum_{k=1}^N q_k r_k'^n P_n(\xi_k) \right]$$

em que $\xi_k = \cos \theta_k = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_k'}{r r_k'}$.

Considerando uma distribuição contínua de carga de densidade volumica $\sigma_v(\vec{r}')$, segundo a mesma linha de cálculo, obtém-se

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \left[\int_{V'} \sigma_v(\vec{r}') P_n(\xi) r'^n dv' \right]$$

com $\xi = \cos \theta = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r r'}$.



É importante analisar os primeiros termos da expansão multipolar. Considere-se, em paralelo, distribuições contínuas e discretas de carga.

⊙ $n=0$: Contribuição monopolar

$$\phi_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \left[\sum_{k=1}^N q_k \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\phi_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \left[\int_{V'} \sigma_v(\vec{r}') dv' \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

(analogamente para distribuições superficiais e lineares de carga)

em que Q é a carga total.

Este será, geralmente, o termo dominante, comportando-se o potencial em pontos afastados da distribuição de carga como se a carga total respectiva se concentrasse na origem O .

⊙ $n=1$: Contribuição dipolar

$$\phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \hat{r} \cdot \left[\sum_{k=1}^N q_k \vec{r}_k' \right] = \frac{\hat{r} \cdot \vec{P}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \hat{r} \cdot \left[\int_{V'} \sigma_v(\vec{r}') \vec{r}' dv' \right] = \frac{\hat{r} \cdot \vec{P}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

(analogamente para distribuições superficiais e lineares de carga)

em que $\vec{P}$ é o momento dipolar da distribuição de carga: ^{superficiais e linhas de carga)}

$$\left[\vec{P} = \sum_{k=1}^N q_k \vec{r}'_k \right] \text{ ou } \left[\vec{P} = \int_V \sigma_v(\vec{r}') \vec{r}' d\vec{r}' \right]$$

Este termo corresponde à contribuição para o potencial $\phi(\vec{r})$ de um dipolo elétrico de momento $\vec{P}$ situado na origem O . Será, geralmente, o termo dominante quando a carga total é nula (momento monopolar $Q=0$).

② $n=2$: Contribuição quadrupolar

$$\phi_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N q_k r_k^2 (3 \cos^2 \theta_k - 1) \right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N q_k r_k^2 \left(3 \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}_k)^2}{r^2 r_k^2} - 1 \right) \right]$$

Usando coordenadas cartesianas, vem:

$$\left[\begin{aligned} \vec{r}/r &= \hat{r} = (l_1, l_2, l_3) \\ \vec{r}'_k &= (x'_{1k}, x'_{2k}, x'_{3k}) \end{aligned} \right]$$

Após cálculos, resulta:

$$\phi_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 l_i Q_{ij} l_j \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{1}{2r^2} \right) x_i Q_{ij} x_j$$

com: $Q_{ij} = \sum_{k=1}^N q_k (3 x'_{ik} x'_{jk} - \delta_{ij} r_k'^2)$ $[Q_{ij}] = [Cm^2]$

Estes coeficientes Q_{ij} são os 9 elementos do tensor momento quadrupolar da distribuição de cargas pontuais (em coordenadas cartesianas). Trata-se de um tensor de 2ª ordem, que se transforma numa mudança de referencial através de uma transformação ortogonal de coordenadas como

$$Q'_{ij} = \sum_{l,m=1}^3 a_{il} a_{jm} Q_{lm}, \text{ em que os coeficientes } a_{\alpha\beta}$$

definem a transformação ortogonal. O valor $\sum_{i,j=1}^3 l_i Q_{ij} l_j$ é um escalar independente do referencial. O tensor quadrupolar é simétrico, $Q_{ij} = Q_{ji}$, e tem traço nulo, $\sum_{i=1}^3 Q_{ii} = 0$, o que significa que há apenas 5 componentes independentes.

Considerando agora uma distribuição volumétrica de carga de densidade $\sigma_v(\vec{r}')$ (analogamente para distribuições superficial ou linhas de carga), vem:

$$\phi_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left[\frac{1}{2} \int_V \sigma_v(\vec{r}') (3 x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) d\vec{r}' \right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{1}{2r^2} \right) x_i Q_{ij} x_j$$

$$\text{sendo: } Q_{ij} = \int_{V'} \rho_V(\vec{r}') [3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}] dV'$$

2.32

Esta contribuição $\phi_2(\vec{r})$ para o potencial $\phi(\vec{r})$ será geralmente dominante quando as contribuições $\phi_0(\vec{r})$ (monopolar) e $\phi_1(\vec{r})$ (dipolar) forem ambas nulas (ou seja, quando o momento monopolar $Q=Q^{(0)}$ e dipolar $\vec{P}=Q^{(1)}$ da distribuição de carga forem ambos nulos).

Simetrias no sistema de cargas implicam, ainda, a anulação de certos elementos do tensor quadrupolar Q_{ij} (em que, como atrás referido, se tem $Q_{ij}=Q_{ji}$ e $\sum_{i=1}^3 Q_{ii}=0$). Para simetria axial em torno do eixo zz , vem:

$$\begin{cases} Q_{12}=0 & Q_{13}=0 & Q_{23}=0 \\ Q_{11}=Q_{22} \\ 2Q_{11}+Q_{33}=0 \end{cases} \quad \begin{aligned} & \text{(pois } \rho_V(x',y',z')=\rho_V(-x',y',z')= \\ & \quad =\rho_V(x',-y',z')=\rho_V(x',y',-z'), \\ & \text{donde } Q_{12}=\int \rho_V(\vec{r}') 3x'y' dV'=0, \\ & \text{e assim sucessivamente)} \end{aligned}$$

Assim, apenas uma quantidade independente $Q^{(2)}$ define o tensor quadrupolar, e o potencial quadrupolar escreve-se

$$\phi_2(\vec{r}) = \frac{Q^{(2)}}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3\cos^2\theta - 1) \quad (\text{simetria axial } zz)$$

No caso particular de um quadrupolo linear, $Q^{(2)} = qd^2$, que é o resultado obtido na secção 2.11.

Núcleos atômicos (constituídos por prótons e neutrões) possuem um eixo de simetria, tomando, por exemplo, a forma de um elipsóide (prolato ou oblato relativamente ao eixo zz). O seu momento quadrupolar indica desvio relativamente à distribuição esférica de carga:

$$\begin{cases} \text{prolato: } Q^{(2)} > 0 \\ \text{oblato: } Q^{(2)} < 0 \end{cases}$$

As unidades SI dos momentos multipolares das distribuições de carga são:

$$\begin{aligned} Q^{(0)} &: C \\ Q^{(1)} &: Cm \\ Q^{(2)} &: Cm^2 \end{aligned}$$

Núcleo	$Q^{(2)}$ (barn)
$^{16}_6O$	0.0
$^{17}_8O$	-0.026
$^{39}_{19}K$	0.11
$^{209}_{83}Bi$	-0.35

Unidade de $Q^{(2)}$: carga pontual $\times 10^{-28} m^2 = \text{barn}$

2.13. Escolha da origem do sistema de coordenadas na expansão multipolar

O momento monopolar $Q^{(0)}$ de uma distribuição de carga é obviamente independente da origem O do sistema de coordenadas adoptado. O momento dipolar $Q^{(1)} = \vec{P}$ e o tensor

$$Q_{ij} = \int_{V'} \rho_V(\vec{r}') (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) dV' = \int_{V'} \rho_V(\vec{r}') (3x'_i x'_j - x'^2 \delta_{ij} - y'^2 \delta_{ij} - z'^2 \delta_{ij}) dV'$$

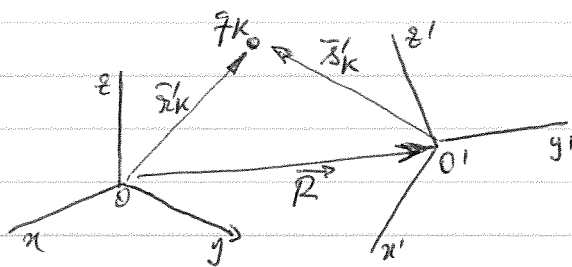
quadrupolar $Q^{(2)}$ dependem, geralmente, do referencial utilizado.

Seja $\vec{R}$ o vetor de posição da origem O' de um novo sistema de coordenadas relativamente a O , a posição da carga q_k no novo referencial seja $\vec{r}'_k$ tal que

$$\vec{r}'_k = \vec{r}_k - \vec{R}$$

Os momentos dipolares nos dois referenciais relacionam-se por:

$$\vec{P}_{O'} = \sum_{k=1}^N q_k \vec{r}'_k = \sum_{k=1}^N q_k (\vec{r}_k - \vec{R}) = \vec{P}_O - Q \vec{R}$$



(ou, para distribuições contínuas de carga: $\vec{P}_{O'} = \int \vec{r}' Q(\vec{r}') d\tau' = \int (\vec{r} - \vec{R}) Q(\vec{r}) d\tau = \vec{P}_O - Q \vec{R}$). Sendo $Q=0$, o momento dipolar não depende da origem do sistema de coordenadas.

Em distribuições de carga com $Q \neq 0$, escolhendo um sistema de coordenadas com origem no "centro de carga" da distribuição, o momento dipolar $\vec{P}$ anula-se. O "centro de carga" define-se por

$$\vec{R}_c = \frac{1}{Q} \sum_{k=1}^N q_k \vec{r}_k \quad \text{ou} \quad \vec{R}_c = \frac{1}{Q} \int \vec{r} Q(\vec{r}) d\tau$$

fazendo O' nesse ponto, vem:

$$\vec{P}_{O'} = \sum_{k=1}^N q_k \vec{r}'_k = \sum_{k=1}^N q_k \vec{r}_k - \vec{R}_c \sum_{k=1}^N q_k = \vec{R}_c Q - \vec{R}_c Q = 0$$

Quanto ao momento quadrupolar, vem:

$$Q'_{ij} = Q_{ij} - 3 P_i P_j - 3 P_j P_i + 3 Q R_i R_j$$

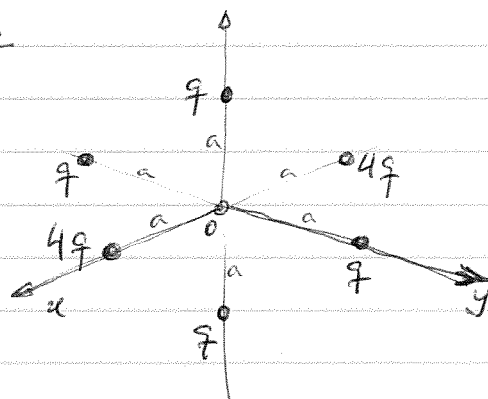
Seja $Q=0$ e $\vec{P}=0$, então $Q'_{ij} = Q_{ij}$, e o momento quadrupolar não depende da origem.

2.14. Exemplos de expansão multipolar

Os exemplos seguintes ilustram o cálculo de momentos multipolares e do potencial resultante de diversas distribuições de carga.

— Distribuições de 6 cargas pontuais

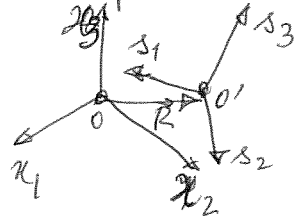
A figura ilustra uma distribuição de 6 cargas pontuais com simetria relativamente à origem dos eixos coordenados. O primeiro termo na expansão multipolar do potencial, para um ponto a distância $r \gg a$



No caso em que a distribuição de carga apresenta uma carga total $Q=0$, e o respectivo momento dipolar é $\vec{P}=0$ (por escolha conveniente da origem do sistema de coordenadas no "centro de carga"), o momento quadrupolar é independente da origem. Sejam Q_{ij} e Q'_{ij} os momentos quadrupolares do sistema de cargas calculados, respectivamente, relativamente aos referenciais com origens em O e O' :

$$Q_{ij} = \int_{V'} dV' \sigma(\vec{r}') [3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}] \quad , \quad [O, x_1, x_2, x_3]$$

$$Q'_{ij} = \int_{V'} dV' \sigma(\vec{r}') [3s'_i s'_j - s'^2 \delta_{ij}] \quad , \quad [O', s_1, s_2, s_3]$$



sendo: $\vec{s}' = \vec{r}' - \vec{OO}' = \vec{r}' - \vec{R}$

Então: $Q'_{ij} = \int_{V'} dV' \sigma(\vec{r}') [3(x'_i - R_i)(x'_j - R_j) - (r'^2 + R^2 - 2\vec{r}' \cdot \vec{R}) \delta_{ij}] =$

$$= \int_{V'} dV' \sigma(\vec{r}') [3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}] -$$

$$- 3 \int_{V'} dV' \sigma(\vec{r}') (x'_i R_j) - 3 \int_{V'} dV' \sigma(\vec{r}') (x'_j R_i) +$$

$$+ 3 \int_{V'} dV' \sigma(\vec{r}') R_i R_j - \int_{V'} dV' \sigma(\vec{r}') R^2 \delta_{ij} -$$

$$- 2 \left[\int_{V'} dV' \sigma(\vec{r}') \vec{r}' \right] \cdot \vec{R} \delta_{ij}$$

Donde:

$$Q'_{ij} = Q_{ij} - 3P_i R_j - 3P_j R_i + 3Q R_i R_j - Q R^2 \delta_{ij} - 2\vec{P} \cdot \vec{R} \delta_{ij}$$

sendo $Q=0$ e $\vec{P}=0$, resulta: $Q'_{ij} = Q_{ij}$

da origem, vale: $\phi_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{k=1}^6 q_k = \frac{12q}{4\pi\epsilon_0 r}$

O momento dipolar da distribuição vale: $\vec{P} = \sum_{k=1}^6 q_k \vec{r}'_k = 0$,
donde a contribuição dipolar para o potencial

$$\phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r} \cdot \vec{P} = 0$$

Quanto à contribuição quadrupolar, sendo $\hat{r} = \vec{r}/|\vec{r}| = (l, m, n)$,
com $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, vem:

$$\begin{aligned} \phi_2(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 l_i Q_{ij} l_j \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[(3l^2 - 1)a^2q + (3m^2 - 1)a^2q + (3n^2 - 1)4a^2q \right] = \\ &= \frac{a^2q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3l^2 + 3m^2 + 12n^2 - 6) = \frac{3a^2q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3n^2 - 1) \end{aligned}$$

Os termos seguintes da expansão de $\phi(\vec{r})$ podem ser calculados,
resultando:

$$\begin{aligned} \phi_3(\vec{r}) &= 0 \\ \phi_4(\vec{r}) &= \frac{q^4q}{16\pi\epsilon_0 r^5} \left[35(l^4 + m^4 + 4n^4) - 90n^2 - 12 \right] \end{aligned}$$

Assim, o potencial em $P(\vec{r})$ vale:

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(\vec{r}) = \frac{6q}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ 2 + \left(\frac{3n^2 - 1}{2} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^2 + \frac{1}{24} \left[35 \left(l^4 + m^4 + 4n^4 \right) - 90n^2 - 12 \right] \times \left(\frac{a}{r} \right)^4 + \dots \right\}$$

Para $r \geq 10a$, a série reduz-se ao primeiro termo, com erro inferior a 1%.

— Momento dipolar de distribuição superficial esférica de carga

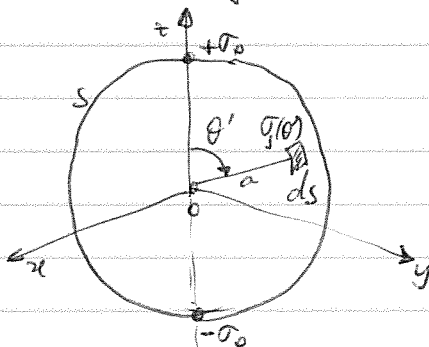
Supõe-se uma densidade superficial de carga

$$\sigma_s = \sigma_0 \cos \theta'$$

distribuída numa superfície esférica
de raio a , centrada na origem. O
momento dipolar relativamente à origem

vale:

$$\vec{P} = \int_S \sigma_s(\vec{r}') \vec{r}' dS$$



Sendo: $\vec{r}' = a (\sin \theta' \cos \phi' \hat{x} + \sin \theta' \sin \phi' \hat{y} + \cos \theta' \hat{z})$
 $dS = a^2 \sin^2 \theta' d\theta' d\phi'$

Vem:

$$P_x = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sigma_0 a^3 \sin^2 \theta' \cos \theta' \cos \phi' d\theta' d\phi' = 0$$

$$P_y = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sigma_0 a^3 \sin^2 \theta' \cos \theta' \sin \phi' d\theta' d\phi' = 0$$

$$P_z = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sigma_0 a^3 \sin \theta' \cos^3 \theta' d\theta' d\phi' = \frac{4}{3} \pi a^3 \sigma_0$$

donde: $\vec{P} = \frac{4}{3} \pi a^3 \sigma_0 \hat{z}$.

→ Momentos de distribuições esférica de carga com simetria axial

Numa esfera de raio a , centrada na origem, existe uma distribuição volumétrica de carga elétrica de densidade

$$\sigma_v(r', \theta') = \begin{cases} \sigma_0 \left(\frac{r'}{a}\right)^2 \sin^2 \theta' & , r' \leq a \\ 0 & , r' > a \end{cases}$$

O momento monopolar é

$$Q = \int_V \sigma_v(\vec{r}') dV' = \frac{\sigma_0}{a^2} \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r'^4 \sin^3 \theta' dr' d\theta' d\phi' = \frac{8}{15} \pi \sigma_0 a^3$$

Analisando ao momento dipolar relativamente à origem:

$$\vec{P} = \int_V \sigma_v(\vec{r}') \vec{r}' dV' \quad , \quad \text{com} \quad \begin{cases} \vec{r}' = r' (\sin \theta' \cos \phi' \hat{x} + \sin \theta' \sin \phi' \hat{y} + \cos \theta' \hat{z}) \\ dV' = r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\phi' \end{cases}$$

As componentes cartesianas de $\vec{P}$ são, assim:

$$P_x = \frac{\sigma_0}{a^2} \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r'^5 \sin^4 \theta' \cos \phi' dr' d\theta' d\phi' = 0$$

$$P_y = \frac{\sigma_0}{a^2} \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r'^5 \sin^4 \theta' \sin \phi' dr' d\theta' d\phi' = 0$$

$$P_z = \frac{\sigma_0}{a^2} \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r'^5 \sin^3 \theta' \cos \theta' dr' d\theta' d\phi' = 0$$

donde $\vec{P} = 0$.

Dada a simetria axial em torno de z , a determinar o tensor momento quadrupolar Q_{ij} resume-se ao cálculo de Q_{zz} , pois o tensor é diagonal e $Q_{xx} = Q_{yy} = -Q_{zz}/2$.

Assim:

$$\begin{aligned} Q_{zz} &= \int_V (3z'^2 - r'^2) \sigma_v(\vec{r}') dV' = \frac{\sigma_0}{a^2} \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r'^6 (3 \cos^2 \theta' - 1) \sin^3 \theta' dr' d\theta' d\phi' = \\ &= \frac{\sigma_0}{a^2} \frac{a^7}{7} 2\pi \int_0^\pi (3 \cos^2 \theta' - 1) \sin^3 \theta' d\theta' = \frac{2\pi \sigma_0 a^5}{7} \int_0^\pi (3 \cos^2 \theta' - 1)(1 - \cos^2 \theta') d\theta' = \\ &= \frac{2\pi \sigma_0 a^5}{7} \int_0^\pi (-3 \cos^4 \theta' + 4 \cos^2 \theta' - 1) \sin \theta' d\theta' = -\frac{16}{105} \pi a^5 \sigma_0 \end{aligned}$$

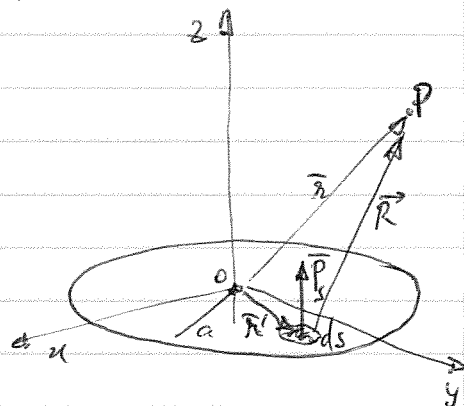
Donde: $[Q_{ij}] = \frac{8\pi}{105} a^5 \sigma_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Disco circular polarizado eletricamente

Um disco circular S de raio a e de pequena espessura contém uma densidade superficial uniforme de dipolos elétricos $\vec{P}_s$ ($[Cm/m^2]$), e situa-se no plano Oxy , centrado. Supõe-se $\vec{P}_s = P_s \hat{z}$.

O potencial elétrico num ponto $P(\vec{r})$, na aproximação dipolar, escreve-se:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\vec{P}_s \cdot \hat{R}}{R^2} ds$$



É conveniente introduzir o ângulo sólido elementar $d\Omega$, e o vector $d\vec{\Omega}$ associado:

$$d\vec{\Omega} = -\hat{R} ds/R^2$$

sendo um ângulo sólido $d\Omega$ definido pelo vértice P e pela área ds , no sentido de $-\hat{R}$. Resulta, assim, o potencial

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{P}_s \cdot \int_S d\vec{\Omega} = -\frac{\vec{P}_s \cdot \vec{\Omega}}{4\pi\epsilon_0}$$

em que $\vec{\Omega}$ é o vector ângulo sólido definido por P e S . No caso de o ponto P se localizar no eixo zz , e recomenda-se uma superfície esférica centrada em P e de raio R (ver figura), vem:

$$d\Omega = \frac{dS}{R^2} = \frac{(2\pi R \sin\beta)(R d\beta)}{R^2} = 2\pi \sin\beta d\beta$$

donde:

$$\Omega = \int_0^\alpha 2\pi \sin\beta d\beta = 2\pi(1 - \cos\alpha)$$

$$\cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}$$

e assim:

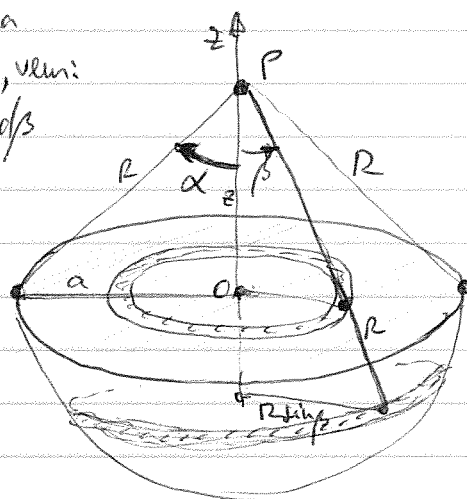
$$\phi(0,0,z) = \pm \frac{P_s}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{|z|}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right]$$

(com os sinais $\pm$ aplicados para $z \geq 0$, respectivamente, em resultado de $\vec{P}$ e $\vec{\Omega}$ serem, também respectivamente, anti-paralelos e paralelos).

O campo eléctrico obtém-se de $\vec{E} = -\nabla\phi$, e vale

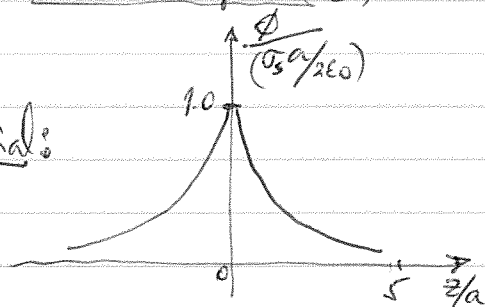
$$\vec{E}(0,0,z) = \frac{P_s}{2\epsilon_0} \left[\frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \right] \hat{z}$$

A figura seguinte compara o potencial ϕ e o campo eléctrico $\vec{E}$ de um disco circular carregado uniformemente (σ_s) e polarizado uniformemente ($\vec{P}_s$), para pontos no eixo zz .

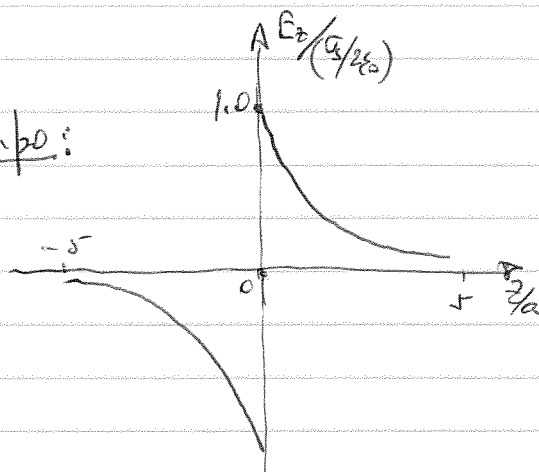
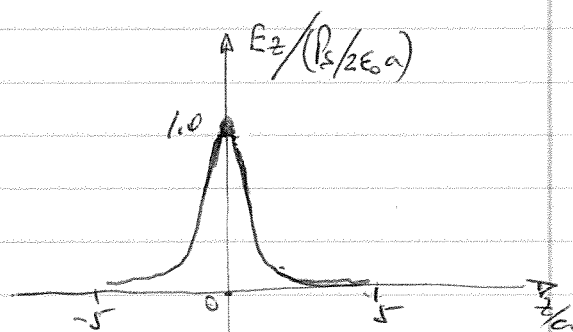
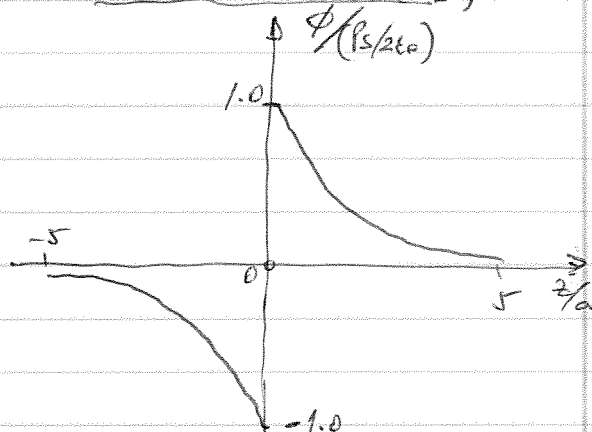


Disco Carregado (σ_s)

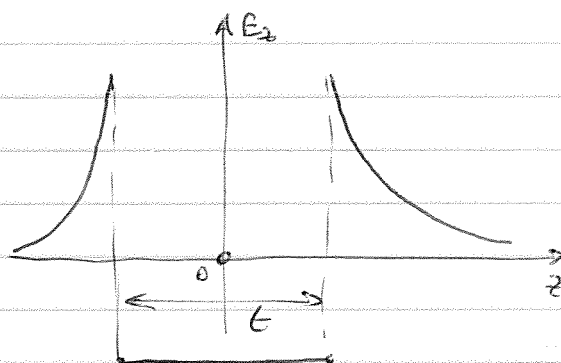
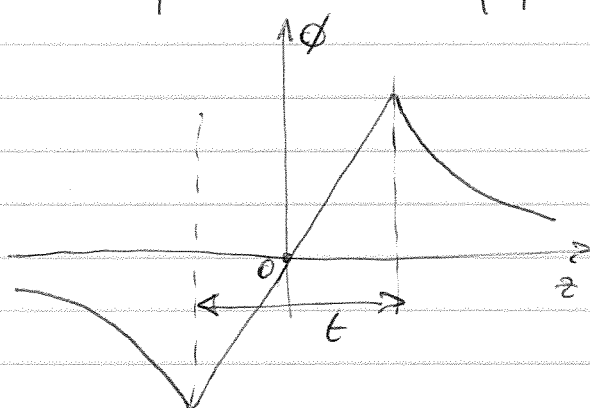
Potencial:



Campo:

Disco Polarizado ($\vec{P}_s$)

A função Φ obtida para o disco polarizado é descontínua na origem, o que resulta de se ter considerado uma distribuição limite de dipolos ideais, que não tem existência física. Tomando uma espessura t para o disco polarizado, as funções potencial (Φ) e campo eléctrico (E_z) são da forma representada na figura.



No limite $t \rightarrow 0$, mantendo-se a mesma densidade de dipolos, obtém-se o resultado anterior, em que o potencial não é único em $z=0$.