

2.

Potencial Eléctrico no Vácuo

- 2.1. Introduções
- 2.2. Potencial eléctrico de uma carga pontual
- 2.3. Potencial eléctrico de distribuições de carga
- 2.4. Exemplos de cálculo da função potencial
- 2.5. Potencial e campo no volume e na superfície de um condutor fechado. Distribuições superficiais de carga.
- 2.6. Superfícies equipotenciais
- 2.7. Teorema de Earnshaw
- 2.8. Equações de Laplace e de Poisson.
- 2.9. Exemplos de soluções das equações de Laplace e de Poisson.
- 2.10. Dipolo eléctrico
- 2.11. Quadrupolo eléctrico.
- 2.12. Expansão multipolar do potencial eléctrico
- 2.13. Escolha da origem do sistema de coordenadas na expansão multipolar.
- 2.14. Exemplos de expansão multipolar.

2. Potencial Eléctrico no Vácuo

2.1. Introdução

2.2. Potencial eléctrico de uma carga pontual

Como se viu no capítulo 1, uma carga pontual q , na origem, cria um campo eléctrico de Coulomb

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

em que $\vec{r}$ é o vector de posição do ponto em que é observado o campo eléctrico. Seja agora uma segunda carga pontual q' situada em $\vec{r}$; sobre ela actua uma força radial

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \hat{r} = f(r) \hat{r}$$

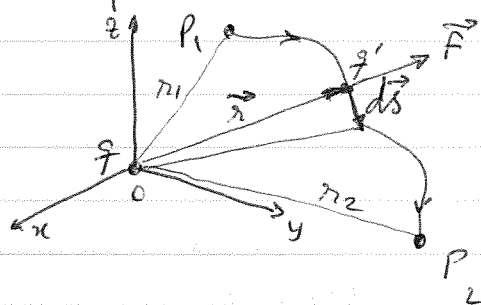
Quando q' se desloca de $d\vec{s}$, com velocidade infinitesimal (regime quase-estático), o trabalho elementar contra a força de Coulomb é

$$dU_e = -\vec{F} \cdot d\vec{s} = -f(r) \hat{r} \cdot d\vec{s} = -f(r) dr$$

em que dr é a componente de $d\vec{s}$ segundo $\hat{r}$. Para um percurso finito entre os pontos P_1 e P_2 , o trabalho realizado será:

$$\int_{P_1}^{P_2} dU_e = - \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = U_e(r_2) - U_e(r_1)$$

apenas dependendo das distâncias r_1 e r_2 , e que gera a diferença de energia potencial eléctrica $U_e(r)$ entre as duas posições. Considerando um qualquer outro percurso entre P_1 e P_2 , a variação de energia potencial eléctrica das duas cargas pontuais será a mesma, donde o campo eléctrico diz-se conservativo (tal como



acontece com o campo gravítico). Considerando q' como uma "carga de teste", define-se a diferença de potencial entre dois pontos do campo eléctrico criado por q como

$$\phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1) = \frac{1}{q'} [U(r_2) - U(r_1)] = \\ = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{1}{q'} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$$

O campo eléctrico é irrotacional, portanto, como

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla\phi}$$

em que $\phi(\vec{r})$ é a função potencial eléctrica, que verifica a relação para campo estático:

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = 0}$$

(campo irrotacional)

Aplicando ao teorema de Stokes (ver Apêndice...), sendo C um percurso fechado e S uma superfície nele apoiada, vem

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{n} ds = \int_S [\nabla \times (-\nabla\phi)] \cdot \hat{n} ds = 0$$

donde

$$\boxed{\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}$$

que é uma propriedade do campo conservativo.

Conhecido o potencial eléctrico $\phi(\vec{r})$ da carga pontual, o cálculo do campo $\vec{E}(\vec{r})$ é simples, em princípio, envolvendo apenas diferenciação: $\vec{E} = -\nabla\phi$. A operação inversa é mais complexa, implicando integração, $\phi(\vec{r}) = -\int \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$, e a fixação da constante de integração. É usual tomar-se o potencial do infinito como zero, e então o potencial num ponto coincide com a diferença de potencial entre esse ponto e o infinito:

$$\phi(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \quad (\phi(\infty) = 0)$$

Tomar $\phi=0$ para $\vec{r} \rightarrow \infty$ é possível quando a distribuição de carga é limitada a um domínio finito.

O potencial eléctrico exprime-se no SI em $J C^{-1}$, normalmente escrito como volt (V). Assim, diz-se que o potencial eléctrico num ponto é de 1V quando o trabalho dispendido para mover a carga pontual de 1C do infinito até esse ponto é de 1J (por qualquer percurso).

Para uma carga pontual q situada no ponto $\vec{r}_q$, o potencial eléctrico $\phi(\vec{r})$ escreve-se como

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

sendo $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_q$.

Considere-se, em maior detalhe, o conceito de campo eléctrico conservativo. Seja uma partícula carregada, movendo-se com velocidade $\vec{v}$ num ponto de uma região de campo nulo, sob acção de uma força $\vec{F}$. Então, a sua energia cinética T varia temporalmente de acordo com

$$dT/dt = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

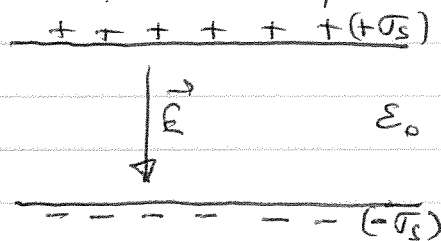
Existindo um campo numa região, e sendo U a energia potencial da partícula nesse ponto, a sua variação temporal decorre quer de $U(\vec{r}, t)$, num ponto fixo, variar temporalmente, quer de $U(\vec{r}, t)$ variar espacialmente ao longo da trajetória da partícula. Assim:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + (\nabla U) \cdot \vec{v}$$

A taxa de variação temporal da energia total ($T+U$) da partícula é, então:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(T+U) &= \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = [\vec{F} \cdot \vec{v}] + \left[\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla U \cdot \vec{v} \right] = \\ &= (\vec{F} + \nabla U) \cdot \vec{v} + \frac{\partial U}{\partial t} \end{aligned}$$

Não variando U explicitamente no tempo, $\partial U/\partial t = 0$, e sendo $\vec{F} = -\nabla U$ (campo $\vec{F}$ irrotacional), então $T+U$ é conservada. No caso electrostático, tem-se $\vec{F} = q\vec{E}$, donde $\vec{F} = -\nabla U$ é equivalente a $\vec{E} = -\nabla\phi$. A escolha do sinal (-) em $\vec{E} = -\nabla\phi$ corresponde, no exemplo de um condensador plano carregado, ao potencial eléctrico da armadura carregada positivamente ($+\sigma_s$) ser superior ao potencial eléctrico da armadura carregada negativamente ($-\sigma_s$).



2.3. Potencial eléctrico de distribuições de carga

Considerando um conjunto de N cargas pontuais q_k em posições $\vec{r}_k$, no vácuo, e em relação directa com o facto de o campo eléctrico do sistema de cargas ser a sobreposição

Quando a distribuição de carga elétrica se estende para o infinito, a fixação do potencial no infinito perde sentido (ex: plano carregado uniformemente (σ_s); $\vec{E} = (\sigma_s/\epsilon_0)\hat{n}$; $\phi(z) = -\int_{\infty}^z (\sigma_s/\epsilon_0) dz = -(\sigma_s/\epsilon_0)(z - \infty)$). Contudo, esta situação não ocorre na realidade, pois não há verdadeiras distribuições físicas de carga estendendo-se ao infinito. Para lá disso, poderá usar-se um ponto qualquer como referência de potencial quando se pretende calcular diferenças de potencial.

A função potencial elétrico é contínua, enquanto o campo elétrico $\vec{E}$ apresenta descontinuidade em superfícies onde existem distribuições de carga ($E_{n2} - E_{n1} = \sigma_s/\epsilon_0$). A continuidade de $\phi(\vec{r})$ explicita o facto de a energia de cargas situadas numa qualquer superfície S não variar entre os "dois lados" de S .

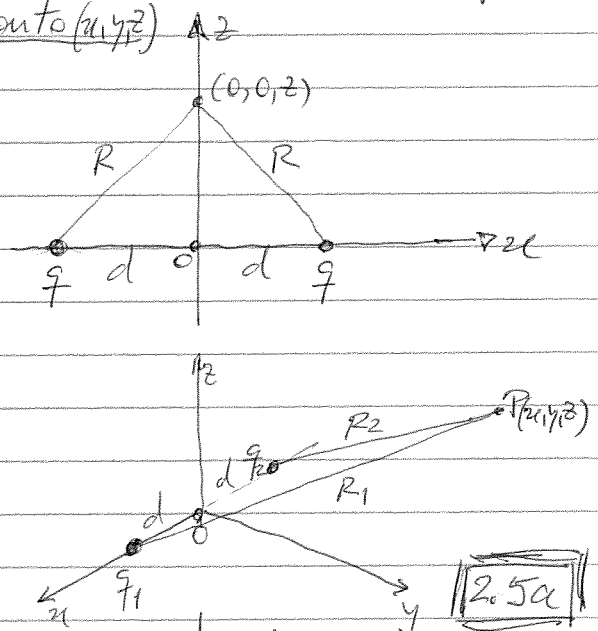
= Potencial de duas cargas pontuais q situadas em $(\pm d, 0, 0)$ no eixo z , e num ponto (x, y, z)

2.4a

$$\phi(0, 0, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2q}{R} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2q}{\sqrt{d^2 + z^2}} \right]$$

Num ponto arbitrário $P(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{R_1} + \frac{q}{R_2} \right] = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \right] \end{aligned}$$

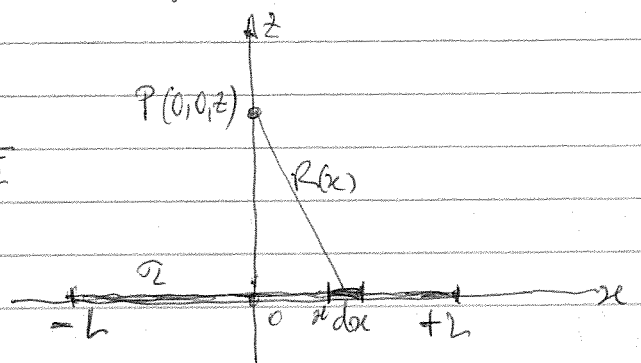


= Potencial de um segmento de reta de comprimento $2L$, no eixo xx' e centrado, com distribuição contínua de carga de densidade σ_L , no eixo normal de simetria

O elemento de carga $\sigma_L dx$ em $(x, 0, 0)$ origina um potencial $d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_L dx}{\sqrt{x^2 + z^2}}$

em $(0, 0, z)$. Assim:

$$\phi(0, 0, z) = \frac{\sigma_L}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^{+L} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$



dos campos das cargas individuais e a relação entre $\vec{E}$ e ϕ ser linear, resulta que o potencial será a soma dos potenciais das cargas pontuais:

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{R_k}}$$

com: $\vec{R}_k = \vec{r} - \vec{r}_k$

Generalizando a distribuições contínuas de densidade $\sigma_v(\vec{r}')$, vem imediatamente:

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\sigma_v(\vec{r}')}{R} dv'} \quad , \quad \text{com } \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

(e semelhantemente para distribuições superficiais ($\sigma_s(\vec{r}')$) ou lineares ($\sigma_l(\vec{r}')$) de carga).

Como analisado no Capítulo 1, o campo elétrico de uma distribuição de carga $\sigma_v(\vec{r}')$ é dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\sigma_v(\vec{r}')}{R^2} \hat{R} dv'$$

Atendendo a que

$$\nabla_{\vec{r}} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\hat{R}}{R^2} \quad (\text{ver Apêndic...})$$

vem:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \sigma_v(\vec{r}') \nabla_{\vec{r}} \left(\frac{1}{R} \right) dv'$$

Como $\nabla_{\vec{r}}$ é o operador derivação sobre as coordenadas $\vec{r}$, enquanto o integral diz respeito ao domínio $\vec{r}'$, pode escrever-se

$$\vec{E}(\vec{r}) = \nabla \left[-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\sigma_v(\vec{r}')}{R} dv' \right] = -\nabla\phi$$

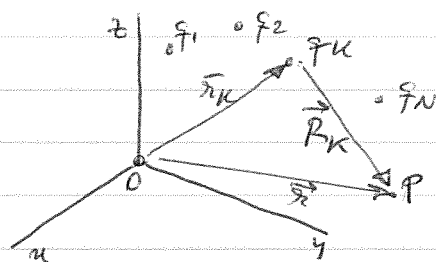
(em que $\nabla \equiv \nabla_{\vec{r}}$), conforme escrito anteriormente para o caso de uma carga pontual no vácuo.

2.4. Exemplos de cálculo da função potencial

Alguns exemplos ilustram o cálculo do potencial elétrico ϕ a partir do campo elétrico $\vec{E}$, ou diretamente da distribuição de carga σ_v (ou σ_s, σ_l).

— Condensador plano

Seja um condensador plano com armaduras situadas em $x=0$, d carregadas com densidades superficiais de carga $\pm\sigma_0$ ($\sigma_0 > 0$), conforme ilustra a figura.



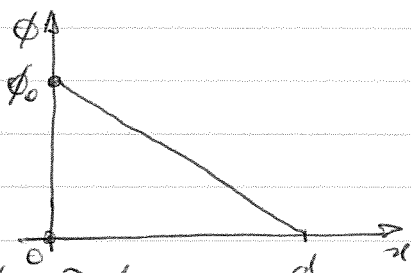
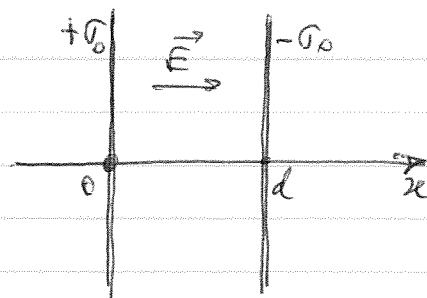
Como discutido no capítulo 1, o campo elétrico é nulo no exterior do condensador e vale $\vec{E} = \sigma_0/\epsilon_0 \hat{x}$ no seu interior.

Assim, para $0 \leq x \leq d$, resulta a diferença de potencial

$$\begin{aligned} \phi(x) - \phi(d) &= - \int_d^x \vec{E} \cdot d\vec{u} = -E \int_d^x du = \\ &= \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} (d-x) \end{aligned}$$

Tomando $\phi(d)=0$ como referência de potencial, vem:

$$\phi(x) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} (d-x) = \phi_0 (d-x), \text{ com } \phi_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} d.$$



— Distribuição retilínea uniforme de carga

Como analisado anteriormente, o campo elétrico de uma distribuição retilínea (eixo z) de carga de densidade σ_L é radial, sendo descrito por $\vec{E}(\rho) = \frac{\sigma_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} \hat{\rho}$

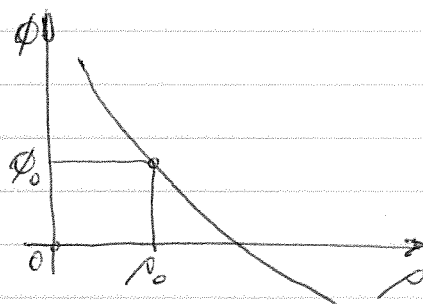
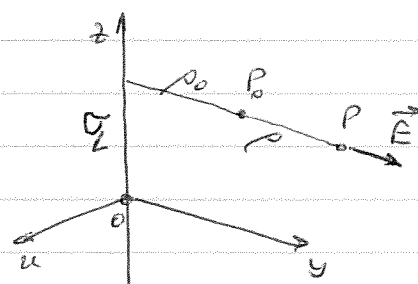
Assim, a diferença de potencial entre pontos P e P_0 à distância ρ e ρ_0 , respectivamente, da reta carregada, será

$$\phi(P) - \phi(P_0) = - \int_{\rho_0}^{\rho} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{\sigma_L}{2\pi\epsilon_0} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho}$$

Donde:

$$\left[\phi(P) - \phi(P_0) = - \frac{\sigma_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0} \right]$$

Note-se que existe divergência para $\rho=0$ (reta de carga) e $\rho \rightarrow \infty$, resultante da distribuição infinita de carga.

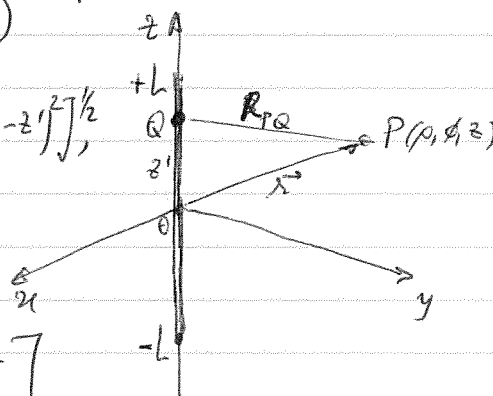


Para uma distribuição de carga uniforme num segmento $-L \leq z \leq +L$, o potencial no ponto $P(\rho, \phi, z)$ pode calcular-se diretamente a partir da distribuição de carga; sendo $R_{PQ} = [\rho^2 + (z-z')^2]^{1/2}$,

vem:

$$\phi = \int_{-L}^{+L} \frac{\sigma_L dz'}{4\pi\epsilon_0 [\rho^2 + (z-z')^2]^{1/2}} =$$

$$= - \frac{\sigma_L}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{z-L + [\rho^2 + (z-L)^2]^{1/2}}{z+L + [\rho^2 + (z+L)^2]^{1/2}} \right] =$$



$$= -\frac{\sigma_L}{4\pi\epsilon_0} \left[\sinh^{-1}\left(\frac{z-L}{\rho}\right) - \sinh^{-1}\left(\frac{z+L}{\rho}\right) \right]$$

O campo eléctrico calcula-se, em coordenadas cilíndricas, a partir de $\vec{E} = -\nabla\phi$:

$$\begin{cases} E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\sigma_L}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{[\rho^2 + (z-L)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[\rho^2 + (z+L)^2]^{1/2}} \right] \\ E_\rho = -\frac{\partial\phi}{\partial\rho} = -\frac{\sigma_L}{4\pi\epsilon_0\rho} \left[\frac{z-L}{[\rho^2 + (z-L)^2]^{1/2}} - \frac{z+L}{[\rho^2 + (z+L)^2]^{1/2}} \right] \end{cases}$$

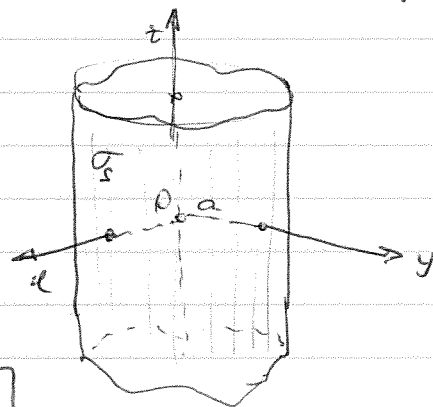
Para $L \rightarrow \infty$, o potencial diverge, e o campo eléctrico tende para $\vec{E} = \frac{\sigma_L}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{\rho}$.

— Superfície cilíndrica uniformemente carregada

Seja a superfície cilíndrica de raio a e eixo zz , carregada com densidade superficial σ_s . O cálculo do potencial resulta directamente do campo eléctrico, que é descrito por

$$\rho < a: E_\rho(\rho) = 0$$

$$\rho > a: E_\rho(\rho) = \frac{\sigma_L}{2\pi\epsilon_0\rho}, \text{ com } \sigma_L = \sigma_s \cdot 2\pi a$$



Assim:

$$\rho < a: \phi = C \text{ (constante)}$$

$$\rho > a: \phi(\rho) - \phi(a) = -\frac{\sigma_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho}{a}$$

a constante como $C = \phi(a)$ pela continuidade do potencial. Novamente, há divergência para $\rho \rightarrow \infty$ para esta distribuição infinita de carga.

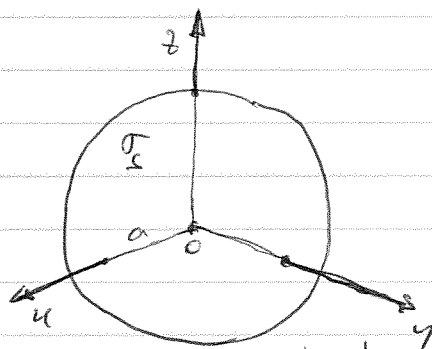
— Esfera condutora carregada

As cargas localizam-se à superfície, com densidade uniforme σ_s (por simetria), devido à repulsão mútua de Coulomb. Assim, as distribuições de campo e de potencial serão as mesmas

para uma esfera condutora, quer para uma superfície esférica carregada. Considerando a esfera de raio a centrada na origem, vem:

$$r < a: E(r) = 0$$

$$\phi(r) = C \text{ (constante)}$$



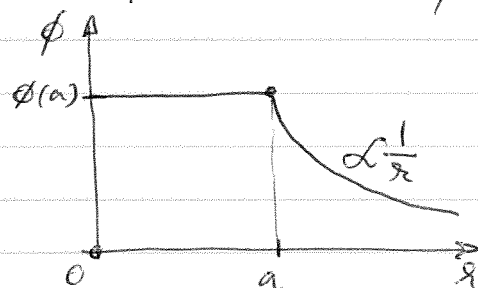
$$r > a: E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \text{ sendo } q = 4\pi a^2 \sigma_s$$

$$\left[\phi(r) - \phi(\infty) = - \int_{\infty}^r E(r) dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right], \text{ sendo } \phi(\infty) = 0$$

Na fronteira $r=a$, pela continuidade do potencial, vem que $C = q/4\pi\epsilon_0 a$.

O potencial na superfície vale $\left[\phi(a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \right]$, enquanto

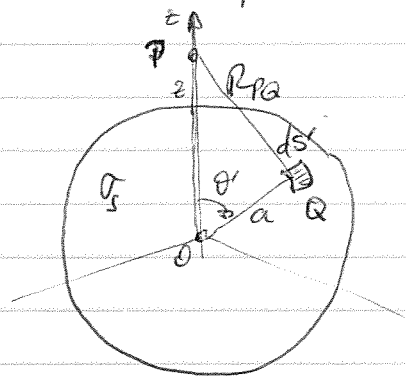
o campo eléctrico à superfície se escreve $E(a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$; assim,



resulta $\phi(a) = E(a) \cdot a$. Para um dado valor de $E(a)$, como, por exemplo, o valor máximo para que não exista descarga eléctrica no ar, resulta que o potencial da esfera pode ser aumentado através do aumento do seu raio a .

O cálculo do potencial da superfície esférica carregada uniformemente pode fazer-se directamente a partir dessa distribuição de carga. Considerando, sem perda de generalidade, o ponto P no eixo zz , o potencial elemental devido à carga num elemento de área ds' localizado em $Q(a, \theta', \phi')$ é

$$d\phi = \frac{\sigma_s a^2 \sin\theta' d\theta' d\phi'}{4\pi\epsilon_0 R_{PQ}}$$



$$\text{sendo: } R_{PQ}^2 = a^2 + r^2 - 2ra \cos\theta'$$

$$\text{Desta relação vem: } 2R_{PQ} dR_{PQ} = 2ra \sin\theta' d\theta'$$

Assim, o potencial em P vale:

$$\phi = \int_{|r-a|}^{r+a} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_s a}{4\pi\epsilon_0 r} dR_{PQ} d\phi' = \frac{\sigma_s a}{2\epsilon_0 r} R_{PQ} \Big|_{|r-a|}^{r+a} =$$

$$= \begin{cases} \frac{\sigma_s a^2}{\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, & r > a \\ \frac{\sigma_s a}{\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}, & r < a \end{cases}$$

O campo eléctrico vale $\vec{E} = -\partial\phi/\partial r \hat{r}$, donde:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma_s a^2}{\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r > a \\ 0, & r < a \end{cases}$$

— Esfera carregada uniformemente

O cálculo pode efectuar-se considerando a contribuição para o potencial num ponto da carga numa "casca esférica" de raio $r' \in [0, a]$ e espessura dr' , com densidade superficial de carga $\sigma_s = \sigma_v dr'$, em que σ_v é a densidade volumica de carga na esfera. Assim:

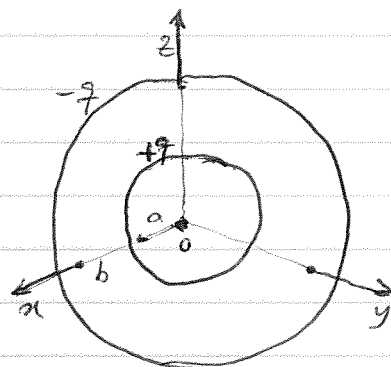
$$\phi = \begin{cases} \int_0^a \frac{\sigma_v r'^2}{\epsilon_0 r} dr' = \frac{\sigma_v a^3}{3\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, & r > a \\ \int_0^r \frac{\sigma_v r'^2}{\epsilon_0 r} dr' + \int_r^a \frac{\sigma_v r'}{\epsilon_0} dr' = \frac{\sigma_v}{2\epsilon_0} \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right) = \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 a^3} \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right), & r < a \end{cases}$$

O campo eléctrico vale:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{r} = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r > a \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^3} r, & r < a \end{cases}$$

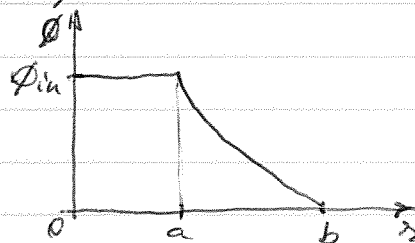
— Condensador esférico

Considere-se o condensador esférico representado na figura, com armaduras de raios a e b ($b > a$) carregadas com cargas simétricas $\pm q$. O potencial pode calcular-se por simples sobreposição dos potenciais das duas superfícies esféricas carregadas: $\phi(r) = \phi_a(r) + \phi_b(r)$



$$\left[\begin{aligned} r < a: & \quad \phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{b-a}{ab} \right) = \phi_{in} \\ b < r: & \quad \phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = 0 \quad (\text{verificando-se } \phi(\infty) = 0) \\ a < r < b: & \quad \phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{b-r}{br} \right) \end{aligned} \right]$$

Note-se que a carga $-q$ da armadura externa promove a blindagem do campo eléctrico no exterior do condensador ($r > b$); como o potencial do infinito foi con-



devido nulo nas expressões de $\Phi_{q,s}(z)$, todo o exterior do condensador estará a um potencial.

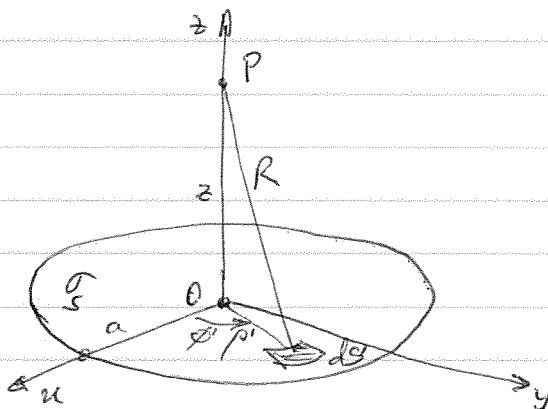
— Disco circular carregado uniformemente: potencial no eixo de simetria normal

O potencial $d\phi$ criado por um elemento de carga $\sigma_s ds'$ situado no ponto $(\rho', \phi', 0)$ no ponto $P(0, 0, z)$ vale

$$d^2\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_s \rho' d\rho' d\phi'}{R}$$

sendo $R^2 = \rho'^2 + z^2$. Integrando em ϕ' , de 0 a 2π , obtém-se o

potencial $d\phi$ de um anel elementar de carga, de raio ρ' e largura $d\rho'$: $d\phi = \frac{\sigma_s \rho' d\rho'}{2\epsilon_0 R}$



Integrando agora em ρ' :

$$\phi(0, 0, z) = \frac{\sigma_s}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{\rho' d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + z^2}} = \frac{\sigma_s}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{a^2 + z^2} - \sqrt{z^2} \right]$$

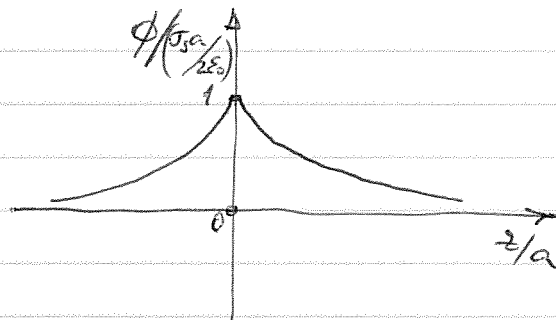
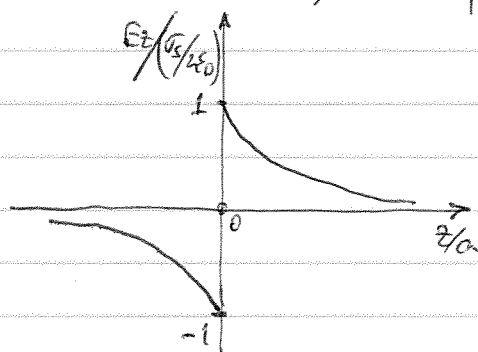
Como deve ser $\phi \rightarrow 0$ para $a \rightarrow 0$, vem:

$$\phi(0, 0, z) = \begin{cases} \frac{\sigma_s}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{a^2 + z^2} - z \right] & , z > 0 \\ \frac{\sigma_s}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{a^2 + z^2} + z \right] & , z < 0 \end{cases}$$

ou, sucintamente:

$$\left[\phi(z) = \frac{\sigma_s}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{a^2 + z^2} - |z| \right] \right]$$

Enquanto se verifica discontinuidade de $\vec{E}$ em $z=0$, não há discontinuidade de ϕ no plano do disco.

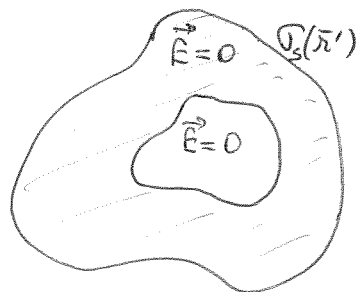


Um condutor contém portadores de carga que se podem mover, com maior ou menor liberdade e devido à aplicação de um campo eléctrico (num condutor metálico, esses portadores são electrões). Em certas condições, os electrões podem abandonar a superfície externa do corpo condutor:

- quando a superfície é iluminada adequadamente, ocorre o efeito fotoeléctrico;
- quando o corpo é aquecido a temperatura elevada, ocorre o efeito termoiónico;
- quando o campo eléctrico é muito elevado, ocorre emissão por efeito de campo.

Nas se verificando condições que resultam na emissão superficial^[*], os portadores de carga não podem abandonar o condutor. Ocorre equilíbrio electrostático se não houver redistribuições de carga, ao longo do tempo, a nível macroscópico.

Considere-se uma cavidade vazia num corpo condutor. A superfície que limita a cavidade é uma superfície equipotencial; não existindo extremos do potencial no interior da cavidade vazia, o potencial deverá ser constante nessa cavidade e deverá ser nulo o campo na cavidade. A densidade superficial de carga na superfície que limita a cavidade também é nula pois, sendo o campo eléctrico nulo, quer no interior quer no exterior da superfície, a componente normal de $\vec{E}$ é contínua na superfície.



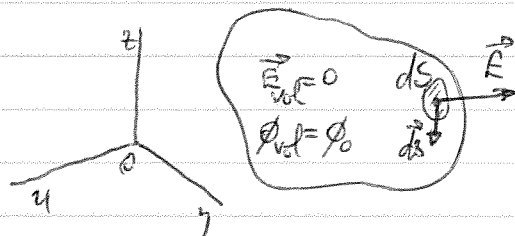
[*] N. D. Lang, W. Kohn: - Theory of metal surfaces: charge density and surface energy, Phys. Rev. B1, 4555-4568 (1970)

- Theory of metal surfaces: work function, Phys. Rev. B3, 1215-1223 (1971)

V. E. Kenner, R. E. Allen, W. M. Saslow, Screening of external fields and distribution of excess charge near a metal surface, Phys Lett 38A, 255-256 (1972)

2.5. Potencial e Campo no volume e na superfície de um condutor fechado. Distribuição superficial de carga.

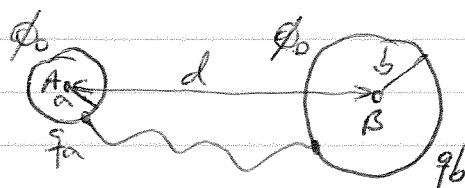
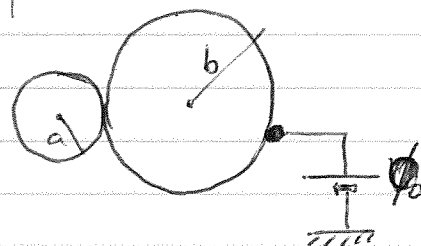
Num condutor carregado, a divisão à repulsão coulombiana, as cargas elétricas, em equilíbrio estático, distribuem-se na superfície do condutor. Assim, a densidade volumétrica de carga no condutor é nula. Recorrendo à lei de Gauss, conclui-se de imediato que o campo elétrico no interior do volume do condutor deve ser nulo, e que na superfície do condutor vale $\vec{E}_{\text{sup}} = \sigma_s / \epsilon_0 \hat{n}$. Daqui deduz-se que o potencial no interior do volume do condutor será constante, $\phi_{\text{int}} = \phi_0$. Considerando um deslocamento elementar na superfície do condutor, a diferença de potencial elementar correspondente será $\vec{E}_{\text{sup}} \cdot d\vec{s} = 0$, pois $\vec{E}_{\text{sup}}$ é normal a $d\vec{s}$. Assim, o potencial na superfície de um condutor fechado é constante, e igual ao potencial do seu volume interior ϕ_0 .



É interessante analisar a distribuição superficial de carga (e correspondente grandezas do campo elétrico na superfície do condutor) relativamente à forma da superfície.

Para tal, considere-se duas esferas condutoras de raios a, b ($b > a$) que foram carregadas quando em contacto (ou seja, colocadas ao mesmo potencial ϕ_0 da fonte de carga, ver figura).

Após a carga, as esferas foram afastadas suficientemente para se poder assumir que as cargas q_a e q_b se distribuem uniformemente nas respectivas superfícies, mantendo-se as esferas equipotenciais, $\phi_a = \phi_b = \phi_0$ (ligadas por condutor).



O potencial elétrico nos centros A, B das esferas pode calcular-se por sobreposição dos potenciais das esferas com cargas q_a, q_b , sendo d a distância entre centros:

$$\phi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_a}{a} + \frac{q_b}{d} \right) \quad \phi_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_a}{d} + \frac{q_b}{b} \right)$$

Como $\phi_A = \phi_B$, vem: $\frac{q_a}{a} + \frac{q_b}{d} = \frac{q_a}{d} + \frac{q_b}{b}$

ou seja, $q_a \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d} \right) = q_b \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{d} \right)$, donde $\frac{q_a}{q_b} = \frac{a(d-b)}{b(d-a)}$

Sendo $b > a$, resulta $q_b > q_a$, ou seja, a esfera de maior raio acumula maior carga a um dado potencial ϕ_0 , como é lógico. Calculando as densidades de carga nas superfícies das esferas, $\sigma_a = \frac{q_a}{4\pi a^2}$ e $\sigma_b = \frac{q_b}{4\pi b^2}$, resulta

$$\left[\frac{\sigma_a}{\sigma_b} = \frac{b}{a} \frac{(d-b)}{(d-a)} \right]$$

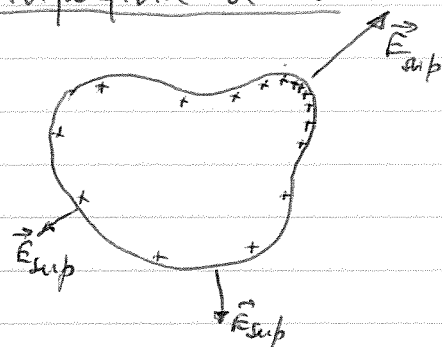
Sendo $b > a$, tem-se $\sigma_a > \sigma_b$, ou seja, a esfera de maior raio tem menor densidade superficial de carga.

De forma intuitiva e qualitativa, esta conclusão aplica-se à distribuição de carga na superfície de um condutor fechado, de forma arbitrária.

As zonas da superfície do condutor com menor raio de curvatura têm maior densidade superficial de carga.

Atendendo à relação entre σ e a grandeza do campo elétrico E_{sup}

($E_{\text{sup}} = \sigma / \epsilon_0$), conclui-se que é nessas zonas que o campo elétrico é mais intenso (o que se designa tradicionalmente por "poder de pontas"). Considerando o condutor no ar (ou num gás, ou líquido isolante), sendo o campo elétrico suficientemente elevado, pode ocorrer ionização do ar (ou do meio isolante), criando-se um caminho condutor elétrico que promove a descarga do condutor inicialmente carregado. A utilização em eletrodos de descarga é bem conhecida, tirando partido da dissipação dielétrica do ar que se verifica com campos elétricos da ordem de $3 \times 10^6 \text{ V/m}$ (ar seco).



2.6. Superfícies equipotenciais

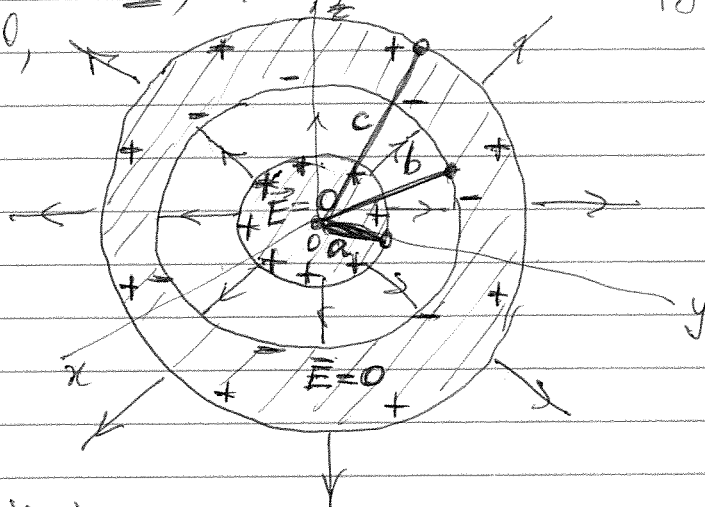
As superfícies equipotenciais são o lugar geométrico dos pontos cujo potencial elétrico é constante, $\phi(r) = \text{constante}$. Considerando o potencial de uma carga pontual, resulta

Exemplo: Considere-se uma esfera condutora (raio a , carga $+q$) 2.11a centrada na origem, rodeada por uma "casca esférica" sem carga (raio interno b , raio externo c ; $b > a$), como mostra a figura. Conforme analisado na Seção 1.10, o campo elétrico resultante tem a seguinte descrição:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \hat{r}$$

sendo:

$$E(r) = \begin{cases} 0, & r < a \\ q/(4\pi\epsilon_0 r^2), & a < r < b \\ 0, & b < r < c \\ q/(4\pi\epsilon_0 r^2), & c < r \end{cases}$$



• Resulta, para o potencial elétrico:

$$\phi(r) = -\int \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = -\int E(r) dr; \text{ donde:}$$

$$\phi(r) = \begin{cases} C_1, & r < a \\ q/(4\pi\epsilon_0 r) + C_2, & a < r < b \\ C_3, & b < r < c \\ q/(4\pi\epsilon_0 r) + C_4, & c < r \end{cases} \quad (C_i: \text{constantes})$$

A determinação das constantes C_i resulta da condição de continuidade do potencial elétrico e da escolha da referência do potencial.

• Tomando a referência do potencial no infinito como zero (o que é adequado, dada a distribuição espacialmente limitada da carga), resulta: $C_4 = 0$.

• Da continuidade do potencial em $r=c$, conclui-se que: $C_3 = q/(4\pi\epsilon_0 c)$.

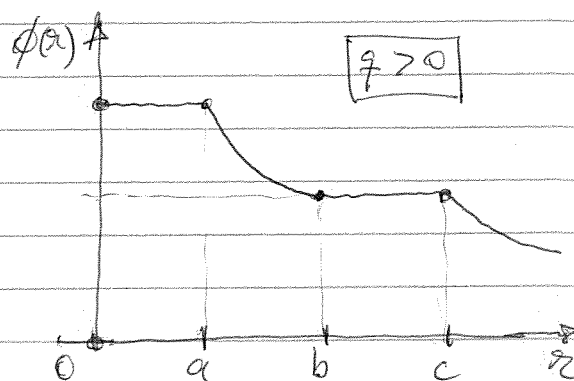
• Na fronteira $r=b$, o potencial é também contínuo, donde:

$$C_3 = q/(4\pi\epsilon_0 c) = q/(4\pi\epsilon_0 b) + C_2; \text{ assim: } C_2 = [q/(4\pi\epsilon_0)](1/c - 1/b).$$

• Novamente, a continuidade do potencial em $r=a$

$$\text{implica: } C_1 = [q/(4\pi\epsilon_0 a)] + C_2 = [q/(4\pi\epsilon_0)](1/a + 1/c - 1/b). \text{ Assim:}$$

$$\phi(r) = [q/(4\pi\epsilon_0)] \times \begin{cases} 1/r, & c \leq r \\ 1/c, & b \leq r < c \\ 1/a + 1/c - 1/b, & a \leq r < b \\ 1/a + 1/c - 1/b, & 0 \leq r < a \end{cases}$$



A referência do potencial elétrico pode, contudo, ser alterada, modificando a

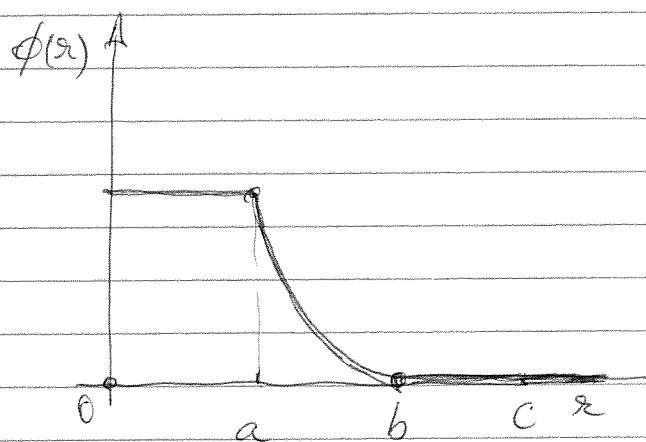
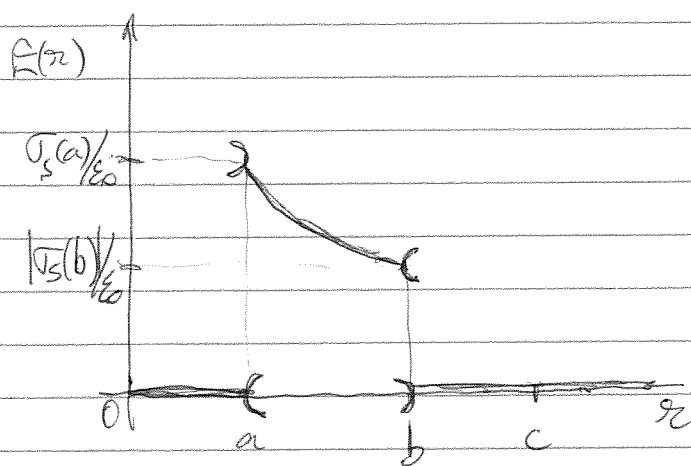
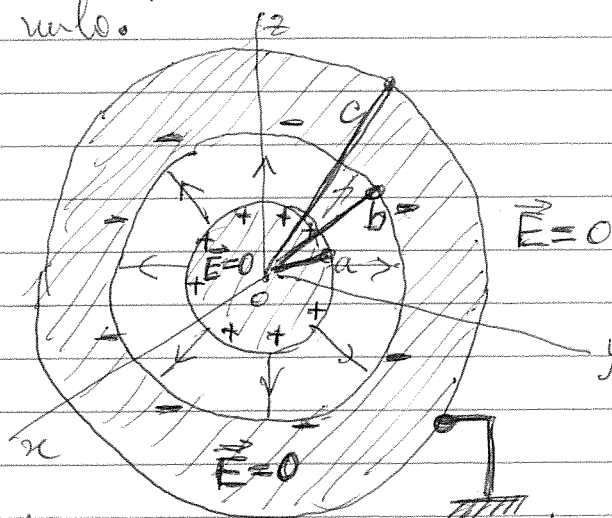
designação de $\phi(r)$. Admita-se, então, que a superfície externa da "casca condutora" foi ligada à terra (potencial nulo). Assim, o potencial no exterior do sistema é nulo. [2.11b]

A "casca esférica" carrega-se agora eletricamente na sua superfície interna, com uma carga total $-q$ simétrica da carga na esfera de raio a .

Essa carga $-q$ é proveniente da terra (depósito ideal inesgotável de carga, cujo potencial não varia com essa extração

de carga, sendo tomado como nulo), e situa-se na superfície interna ($r=b$) da "casca esférica" (atraída pela carga simétrica da esfera de raio a). O campo elétrico é nulo no interior dos dois condutores. As densidades superficiais de carga são:

$$\sigma_s(a) = +q / (4\pi a^2) \quad ; \quad \sigma_s(b) = -q / (4\pi b^2)$$



$$E(r) = \begin{cases} 0, & r < a \\ q/(4\pi\epsilon_0 r^2), & a < r < b \\ 0, & b < r \end{cases}$$

$$\phi(r) = \begin{cases} C'_1, & r < a \\ q/(4\pi\epsilon_0 r) + C'_2, & a < r < b \\ C'_3, & b < r \end{cases}$$

• $b \leq r$: $C'_3 = 0$

• $r = b$: $q/(4\pi\epsilon_0 b) + C'_2 = 0$; $C'_2 = -q/(4\pi\epsilon_0 b)$

• $r = a$: $C'_1 = q/(4\pi\epsilon_0 a) + C'_2 =$
 $= [q/(4\pi\epsilon_0)] (\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$

imediatamente que ele varia sem descontinuidades no espaço, sendo as superfícies equipotenciais fechadas. Tal conclusão generaliza-se, por sobreposição, ao caso de distribuições arbitrárias de carga.

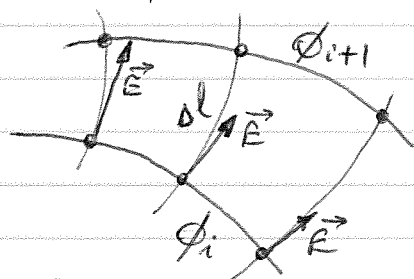
Dada a relação entre o campo eléctrico $\vec{E}$ e o potencial, $\vec{E} = -\nabla\phi$, resulta que as linhas de força do campo eléctrico são normais às superfícies equipotenciais. Os pontos em que a derivada de ϕ em qualquer direcção é nula (máximos, mínimos ou pontos de inflexão de $\phi(\vec{r})$) correspondem a campo eléctrico nulo. Nas regiões de máximo ou mínimo, existem distribuições de carga positiva ou negativa, respectivamente. Nos pontos de inflexão, o potencial é crescente em certas orientações, e decrescente noutras, a partir desse ponto (ponto de sela).

A representação das superfícies equipotenciais, em da sua intersecção com o plano de desenho (linhas equipotenciais), faz-se de acordo com uma convenção de representação, tal como acontece com a representação das linhas de força do campo eléctrico. Assim, representa-se as superfícies (ou linhas) equipotenciais mantendo um valor constante de diferença de potencial entre superfícies (ou linhas) vizinhas: $\phi_{i+1}(\vec{r}) - \phi_i(\vec{r}) = \Delta\phi$ constante.

A convenção de representação adoptada permite estimar facilmente a grandeza do campo eléctrico, para lá da sua orientação (direcção e sentido). Assim, como $\vec{E} = -\nabla\phi$, vem da definição de gradiente que:

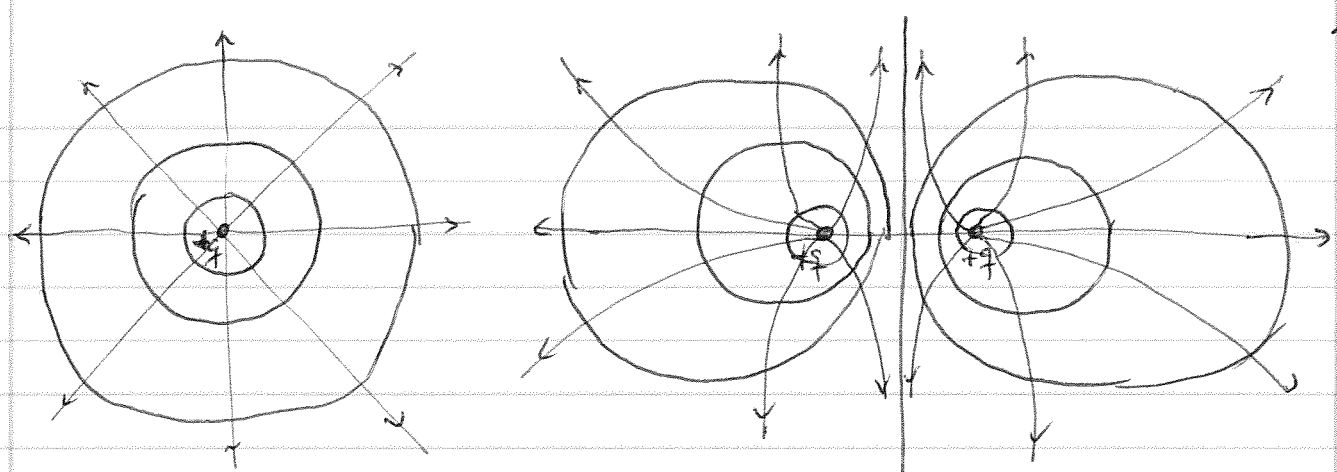
$$|\vec{E}| \approx \frac{|\Delta\phi|}{\Delta l}, \text{ em que } \Delta l \text{ é}$$

a distância local entre equipotenciais vizinhas. O campo eléctrico é maior quando nas regiões em que o afastamento entre as superfícies equipotenciais é menor.

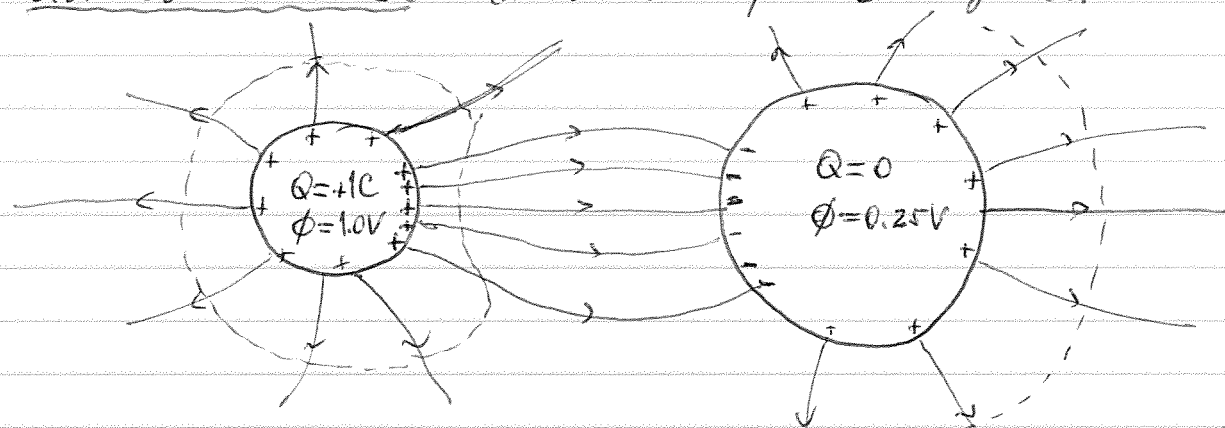


$$\left[\begin{array}{l} \phi_{i+1} < \phi_i \\ \Delta\phi = \phi_{i+1} - \phi_i < 0 \end{array} \right]$$

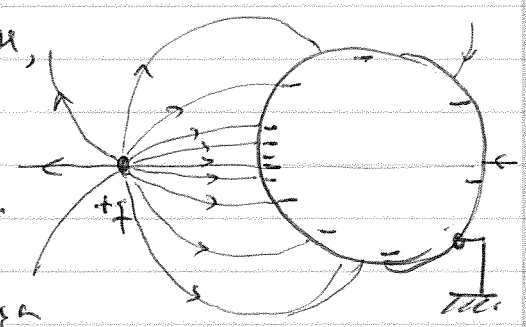
As figuras seguintes ilustram duas situações simples em que se representa simultaneamente linhas equipotenciais e linhas de força do campo eléctrico.



A figura seguinte ilustra uma situação mais complexa, envolvendo duas esferas condutoras. Note-se a não-uniformidade das distribuições de carga nas superfícies, em particular a distribuição de cargas positivas e negativas na esfera da direita (cuja carga total é nula). Atente-se, ainda, na existência de linhas de força do campo eléctrico entre as esferas, ligando cargas superficiais $\sigma_{s,1}$ e $\sigma_{s,2}$ simétricas, bem como linhas de força estendendo-se para o infinito (o potencial é nulo no infinito, de onde foi retirada uma carga positiva de $+1C$, correspondente à carga total das duas esferas). A esfera da direita apresenta uma distribuição superficial de carga do "tipo dipolar", devido à "influência electrostática" da outra esfera carregada.



A figura mostra o caso de uma carga pontual positiva e uma esfera condutora ao potencial nulo (ligada à terra). A esfera carrega-se, não-uniformemente, com cargas negativas, por "influência electrostática" da carga pontual positiva $+q$.



O traçado rigoroso das linhas de força e equipotenciais resulta da solução das equações de Laplace

e de Poisson, discutidas adiante, para uma situação geral. Considere-se aqui, como exemplo de cálculo direto, o potencial criado por um segmento de reta carregado uniformemente centrado na origem e alinhado com z .

Vem:

$$\phi(P) = \frac{\sigma_L}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{z + L + r_1}{z - L + r_2} \right]$$

conforme cálculo na seção 2.4.

Definindo: $\begin{cases} z_1 = z + L \\ z_2 = z - L \end{cases}$

vem:

$$\phi(P) = \frac{\sigma_L}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{z_1 + r_1}{z_2 + r_2} \right]$$

Assim, as superfícies equipotenciais são definidas por

$$\frac{z_1 + r_1}{z_2 + r_2} = C \text{ (constante)}$$

(adiante mostra-se que $C > 1$)

Donde: $r_1 - C r_2 = -z_1 + C z_2$, e ainda $z_1 + r_1 = C(z_2 + r_2)$.

Como: $\rho^2 = r_1^2 - z_1^2 = r_2^2 - z_2^2$

resulta, por divisão ordinada:

$$\frac{r_1^2 - z_1^2}{r_1 + z_1} = \frac{r_2^2 - z_2^2}{C(r_2 + z_2)}, \text{ donde } r_1 - z_1 = \frac{1}{C}(r_2 - z_2),$$

ou seja: $C r_1 - r_2 = C z_1 - z_2$

Subtraindo ordinadamente $\begin{cases} r_1 - C r_2 = -z_1 + C z_2 \\ C r_1 - r_2 = C z_1 - z_2 \end{cases}$

resulta:

$$(C-1)(r_1 + r_2) = (C+1)(z_1 - z_2) = (C+1)2L$$

Definindo uma nova constante K_2 como

$$K_2 = L \frac{C+1}{C-1}$$

vem:

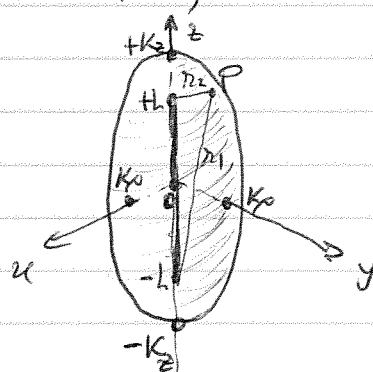
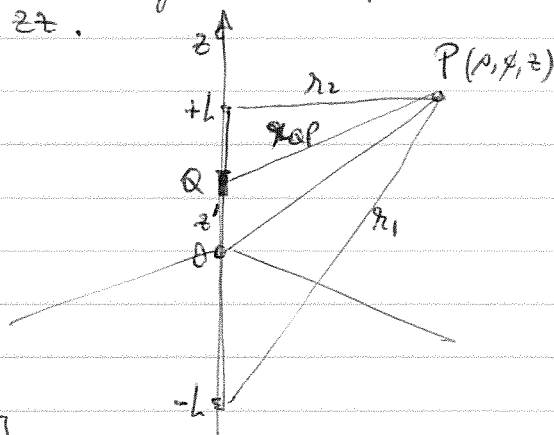
$$r_1 + r_2 = 2K_2$$

que é a equação de um elipsóide de revolução, com eixo maior segundo z de comprimento $2K_2$, e com focos em $(0, 0, \pm L)$.

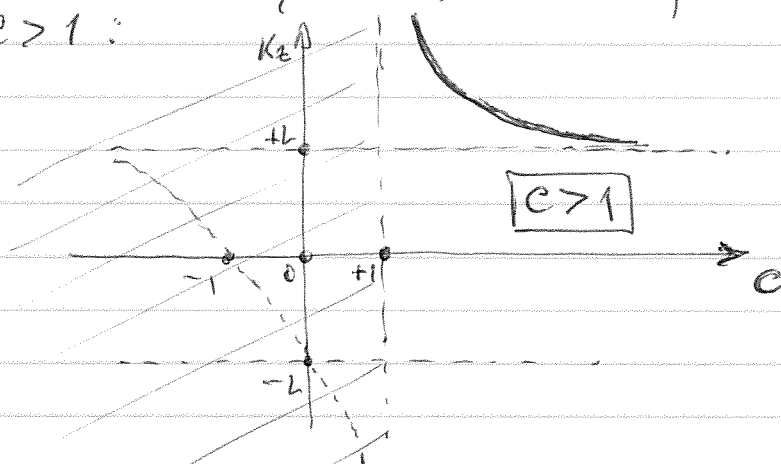
O potencial nesse elipsóide vale

$$\phi(K_2) = \frac{\sigma_L}{4\pi\epsilon_0} \ln C = \frac{\sigma_L}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{K_2 + L}{K_2 - L} \right]$$

O semi-eixo menor da elipse geratriz



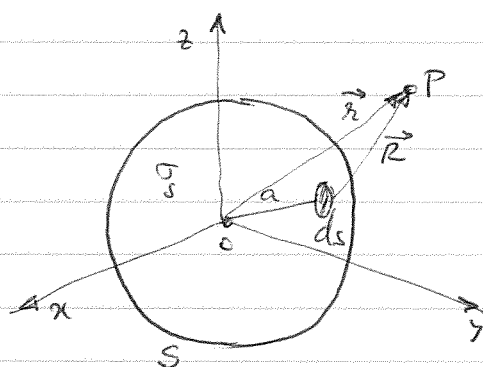
vale: $K_p = \sqrt{K_z^2 - L^2}$
 Como se deve ter $K_z, K_p > 0$, resulta que deve ser
 $K_z > L$ e $C > 1$:



2.7. Teorema de Earnshaw

Seja uma superfície esférica S de raio a , contendo uma carga uniformemente distribuída com densidade superficial σ_s . Para um ponto $P(\vec{r})$ no exterior da superfície esférica, e sendo $q = 4\pi a^2 \sigma_s$, o campo elétrico e o potencial escrevem-se:

$$\begin{cases} \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \\ \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \end{cases}$$



Como:
$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma_s ds}{R} = \frac{q}{4\pi a^2} \int_S \frac{ds}{4\pi\epsilon_0 R}$$

vem que:

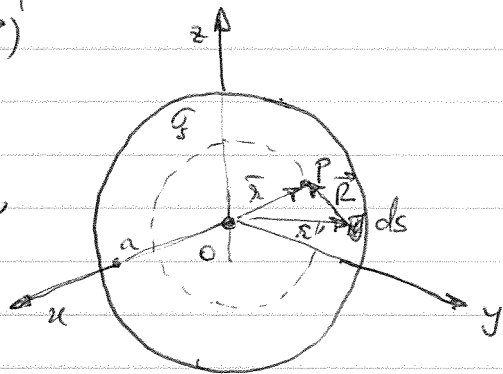
$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi a^2} \int_S \frac{q ds}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Este resultado pode ser interpretado de uma forma interessante. Assim, e considerando uma carga pontual q situada em P , o potencial no centro da esfera (0) é dado pelo 1º membro da igualdade anterior; o 2º membro é o potencial médio $\langle \phi \rangle$ sobre a superfície esférica, devido à carga q situada em P . Donde o valor médio do potencial criado pela carga q situada em P , sobre a superfície esférica é o potencial dessa carga no centro da esfera. Tal é válido, generali-

zando, por sobreposição, para qualquer distribuição de carga no exterior da esfera.

Deste resultado deriva uma conclusão importante. Seja uma região do espaço em que a densidade volumétrica de carga é nula ($\sigma_v = 0$), e que contém um ponto O em que, supostamente, o potencial é máximo. Então, o valor médio $\langle \phi \rangle$ do potencial sobre uma superfície esférica centrada em O deverá ser inferior a $\phi(O)$; pela análise anterior, tal não é verdadeiro, contudo (pois se verifica igualdade do potencial em O e no valor médio $\langle \phi \rangle$). Semelhantemente, para a hipótese de mínimo de potencial em O . Assim, numa região livre de cargas, não pode ocorrer nem máximo nem mínimo do potencial (teorema de Earnshaw). Um poço de potencial (capaz de capturar cargas eléctricas) não pode ser construído numa região espacial sem cargas, a partir de um campo electrostático.

Seja novamente uma carga q uniformemente distribuída sobre uma superfície esférica S de raio a . O campo eléctrico E num ponto $P(\vec{r})$ interior é nulo: $E_\theta = E_\phi = 0$ por simetria, e usando uma superfície de Gauss esférica de raio $r < a$, conclui-se que também $E_r = 0$. Assim, o potencial no interior da esfera de raio a é o potencial na sua superfície, ou seja, $q/4\pi\epsilon_0 a$. Assim, num ponto $P(\vec{r})$ interior, tem-se



$$\phi(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} = \int_S \frac{\sigma_s ds}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi a^2} \int_S \frac{q ds}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Conclui-se que $\phi(P)$ é igual ao potencial médio $\langle \phi \rangle$ sobre uma superfície esférica de raio a criada por uma carga pontual q situada em P . Esse valor médio $\langle \phi \rangle$ é independente da posição da carga no interior da esfera. Tal pode generalizar-se, recorrendo ao princípio de sobreposição, a qualquer distribuição de carga no interior da superfície esférica S .

2.8. Equações de Laplace e de Poisson

Da lei de Gauss na forma diferencial,

$$[\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \sigma]$$

e da relação entre campo eléctrico e potencial,

$$[\vec{E} = -\nabla \phi]$$

resulta imediatamente que

$$\epsilon_0 \nabla \cdot (-\nabla \phi) = -\epsilon_0 \nabla \cdot \nabla \phi = -\nabla^2 \phi$$

que se designa por equação de Poisson:

$$\boxed{\epsilon_0 \nabla^2 \phi = -\sigma}$$

Trata-se de uma relação local entre a densidade volumica de carga $\sigma(\vec{r})$ e as segundas derivadas do potencial $\phi(\vec{r})$.

Em regiões em que a densidade de carga é nula, vem imediatamente a equação de Laplace:

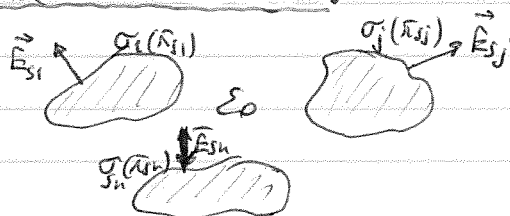
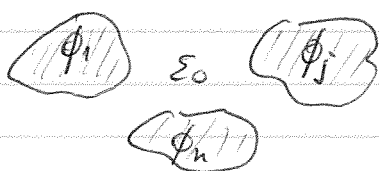
$$\boxed{\nabla^2 \phi = 0}$$

A solução de um problema de Electrostática no vácuo corresponde, assim, a integrar as equações de Laplace ou de Poisson, obtendo-se soluções que satisfazam as condições fronteiras.

Considere-se o caso, muito geral, em que há cargas nas superfícies de um conjunto de condutores situados no vácuo. No espaço exterior aos condutores $\nabla^2 \phi = 0$. Nas fronteiras (superfícies dos condutores, infinito) podem ser estabelecidas dois tipos de condição:

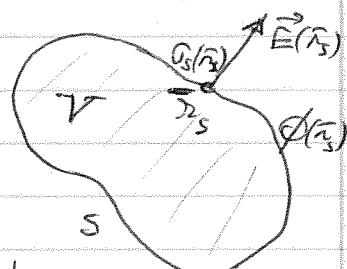
— nas potenciais dos condutores, ϕ_j (as superfícies dos condutores em equilíbrio estático são equipotenciais, e o volume interior aos condutores está também ao potencial da superfície, ϕ_j). Tal corresponde ao "problema de Dirichlet".

— nas densidades superficiais de carga $\sigma_j(\vec{r}_{sj})$ na superfície dos condutores; do valor de $\sigma_j(\vec{r}_{sj})$ resulta directamente o campo eléctrico na superfície, $\vec{E}_{sj}(\vec{r}_{sj}) = \sigma_j(\vec{r}_{sj})/\epsilon_0 \hat{n}_j(\vec{r}_{sj})$, ou seja, o valor do gradiente do potencial na superfície $\hat{n} \partial \phi / \partial n(\vec{r}_{sj})$. Tal respecta ao "problema de Neumann".



Este "problema eletrostático geral", que consiste em determinar a função potencial ϕ que satisfaz a equação de Laplace e as condições nas fronteiras condutoras e no infinito, tem solução única, como se demonstra. Para tal, considere-se um condutor de volume V limitado pela superfície S , sendo dado o potencial nessa superfície, $\phi(\vec{r}_s)$, ou em alternativa, a densidade superficial de carga $\sigma(\vec{r}_s)$ — o que é equivalente a fixar o campo elétrico em S , pois $\vec{E}(\vec{r}_s) = \partial\phi/\partial n \hat{n}(\vec{r}_s) = \sigma_s(\vec{r}_s)/\epsilon_0 \hat{n}(\vec{r}_s)$. Dada a linearidade do problema, o caso de vários condutores pode ser abordado por superposições.

Dizente-se, em primeiro lugar, o "problema interno" de determinação de $\phi(\vec{r})$ tal que $\phi(\vec{r}_s)$ ou $\partial\phi/\partial n(\vec{r}_s)$, em alternativa, são impostos na fronteira S . Se houvesse duas soluções distintas



$\phi_1(\vec{r}) \neq \phi_2(\vec{r})$ no domínio de S e seu espaço interior V , então a função $\tilde{\phi}(\vec{r}) = \phi_1(\vec{r}) - \phi_2(\vec{r})$ verificaria: $\nabla^2 \tilde{\phi}(\vec{r}) = \nabla^2 \phi_1(\vec{r}) - \nabla^2 \phi_2(\vec{r}) = 0$ em V e $\tilde{\phi}(\vec{r}_s) = 0$ ou $\partial\tilde{\phi}/\partial n(\vec{r}_s) = 0$ em S .

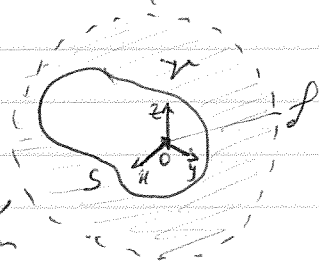
Como $\tilde{\phi} \partial\tilde{\phi}/\partial n = (\tilde{\phi} \nabla \tilde{\phi}) \cdot \hat{n}$ da definição de gradiente, vem (sendo $\tilde{\phi}$ e suas derivadas contínuas, por aplicação do teorema de Gauss e de identidades vectoriais):

$$\int_S \tilde{\phi} \partial\tilde{\phi}/\partial n dS = \int_V (\tilde{\phi} \nabla \tilde{\phi}) \cdot \hat{n} dS = \int_V \nabla \cdot (\tilde{\phi} \nabla \tilde{\phi}) dV = \int_V (\tilde{\phi} \nabla \cdot \nabla \tilde{\phi} + \nabla \tilde{\phi} \cdot \nabla \tilde{\phi}) dV =$$

$$= \int_V (\tilde{\phi} \nabla^2 \tilde{\phi} + |\nabla \tilde{\phi}|^2) dV = \int_V |\nabla \tilde{\phi}|^2 dV = 0 \quad (\text{em resultado das condições sobre } \tilde{\phi}(\vec{r}_s) \text{ ou } \partial\tilde{\phi}/\partial n(\vec{r}_s) \text{ acima}).$$

Como o integrando $|\nabla \tilde{\phi}|^2$ é não-negativo, tal implica que $\nabla \tilde{\phi} = 0$ em V , donde $\tilde{\phi} = C$ (constante) em V . Se $\tilde{\phi}(\vec{r}_s) = 0$ (problema de Dirichlet), então $C = 0$ e $\tilde{\phi} = 0$ em V , ou seja, $\phi_1(\vec{r}) = \phi_2(\vec{r})$ em V . Se $\partial\tilde{\phi}/\partial n(\vec{r}_s) = 0$ (problema de Neumann), então C é indeterminada, e resulta $\phi_2(\vec{r}) = \phi_1(\vec{r}) + \text{constante}$ (solução não estaticamente única, mas diferindo apenas por uma constante arbitrária da outra solução).

No "problema externo", a equação de Laplace $\nabla^2 \phi = 0$ deve ser verificada, sendo $\phi(\vec{r}_s)$ constante sobre S , podendo ser especificadas, em alternativa, $\phi(\vec{r}_s)$ ou $\partial\phi/\partial n(\vec{r}_s)$. Mostra-se que a solução é única (no sentido anterior) por um processo análogo, sendo aqui necessário atender ao comportamento de ϕ no infinito. Para tal, considera-se a superfície S e uma superfície esférica S' centrada num ponto qualquer, e o domínio V entre S e S' . As condições fronteira



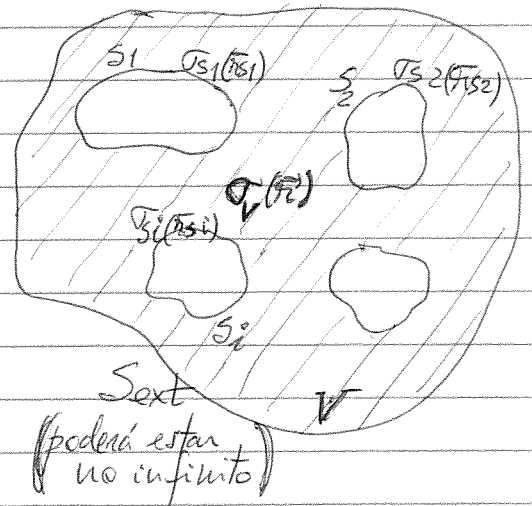
218a
 Considera-se um volume V contendo fronteiras condutoras, e limitado por condutores ou não-limitado, contendo uma distribuição de carga de densidade $\rho_v(\vec{r})$, sendo $\rho_{Si}(\vec{r}_{Si})$ as densidades de carga superficial nos condutores. Mostra-se, de seguida, que o campo eléctrico resultante é univocamente determinado.

Supondo duas soluções distintas do campo eléctrico resultante, $\vec{E}_1(\vec{r})$ e $\vec{E}_2(\vec{r})$, verificando ambas as condições indicadas, no espaço entre os condutores ter-se-á:

$$\nabla \cdot \vec{E}_{1,2}(\vec{r}) = \rho_v(\vec{r})/\epsilon_0$$

Considerando superfícies de Gauss S_i imediatamente no exterior dos condutores,

resulta: $\oint_{S_i} \vec{E}_{1,2} \cdot \hat{n}_i dS_i = Q_i/\epsilon_0$, sendo $Q_i = \int_{S_i} \rho_{Si}(\vec{r}_{Si}) dS_i$.



Para a fronteira exterior de V (finita, ou no infinito) resulta, igualmente:

$$\oint_{S_{ext}} \vec{E}_{1,2} \cdot \hat{n}_{ext} dS_{ext} = Q_{total}/\epsilon_0, \text{ sendo } Q_{total} \text{ a carga no interior de } S_{ext}.$$

Assim: - na região entre condutores: $\nabla \cdot [\vec{E}_1 - \vec{E}_2] = 0$
 - em todas as superfícies fronteira: $\oint_{S_i, S_{ext}} (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \hat{n} dS = 0$

Ora a superfície de cada condutor em equilíbrio é uma superfície equipotencial; assim, os potenciais $\phi_{1,2}$ associados aos campos $\vec{E}_{1,2}$ devem ser constantes (eventualmente diferentes) em cada superfície.

Como: $\nabla \cdot [(\phi_1 - \phi_2)(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)] = (\phi_1 - \phi_2) \nabla \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) + (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \nabla(\phi_1 - \phi_2) = 0 - |\vec{E}_1 - \vec{E}_2|^2$.

Integrando na região entre condutores e recorrendo ao teorema de Gauss-Green:

$$\int_V \nabla \cdot [(\phi_1 - \phi_2)(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)] dV = \oint_S (\phi_1 - \phi_2)(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \hat{n} dS = (\phi_1 - \phi_2) \oint_S (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \hat{n} dS = 0 = - \int_V |\vec{E}_1 - \vec{E}_2|^2 dV$$

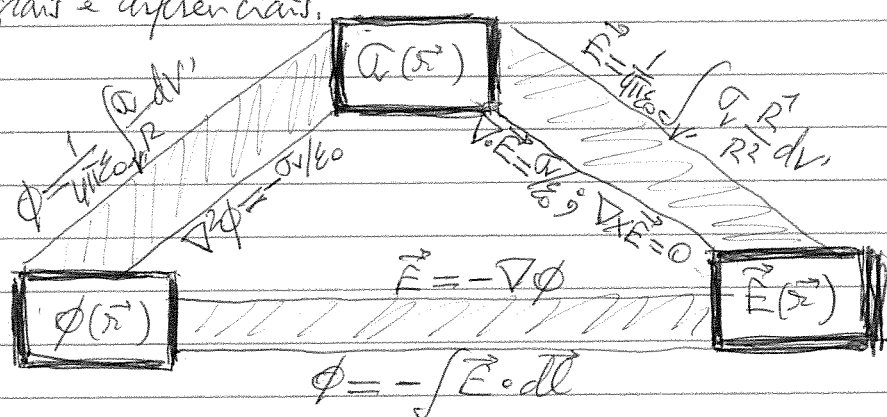
(pois $\phi_1 - \phi_2 = \text{constante}$ em cada superfície S_i e S_{ext} ; se S_{ext} no infinito, $\phi_1 - \phi_2 = 0$).

Resulta, então: $\int_V |\vec{E}_1 - \vec{E}_2|^2 dV = 0$

logo: $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$ em todos os pontos.

- No caso de ser fixado o potencial na superfície S de fronteira de um volume V , e existir uma distribuição de carga de densidade $\rho_V(\vec{r})$ em V , deverá verificar-se a equação de Poisson $\nabla^2\phi = -\rho_V/\epsilon_0$. Admitindo duas soluções distintas, ϕ_1 e ϕ_2 , resulta $\nabla^2\phi_1 - \nabla^2\phi_2 = 0$; a diferença $\phi_1 - \phi_2$ das soluções verifica a equação de Laplace e tem valor nulo na fronteira S . Assim, $\phi_1 = \phi_2$.
Decorre que o potencial $\phi(\vec{r})$ em V é univocamente determinado se for especificada a densidade de carga $\rho_V(\vec{r})$ em V , e o valor do potencial $\phi(\vec{r}_S)$ em todas as fronteiras.

- Em Eletrostática no vácuo, há três grandezas fundamentais, que estão relacionadas entre si: a densidade de carga $\rho_V(\vec{r})$, o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$, e o potencial elétrico $\phi(\vec{r})$. O diagrama ilustra as relações integrais e diferenciais.



Condições fronteira do campo elétrico $\vec{E}$

Considera-se uma superfície S onde a densidade de carga superficial é $\rho_S(\vec{r}_S)$.

- Considerando a lei de Gauss, com uma superfície elementar de Gauss como representado na figura,

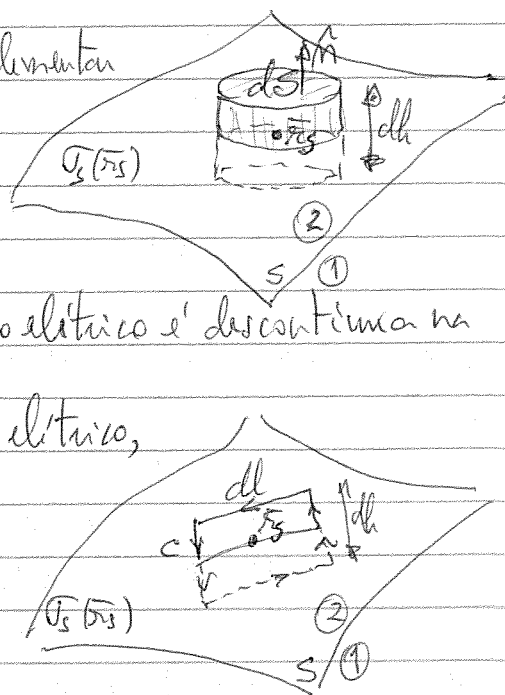
$$\oint_{SG} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_S(\vec{r}_S) dS \quad ; \quad \text{fazendo } dh \rightarrow 0:$$

$$E_{n2}(\vec{r}_S) - E_{n1}(\vec{r}_S) = \rho_S(\vec{r}_S)/\epsilon_0$$

A componente normal à superfície do campo elétrico é descontínua na fronteira se $\rho_S(\vec{r}_S) \neq 0$.

- Atendendo ao caráter conservativo do campo elétrico, e considerando um percurso elementar como representado na figura, $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$; fazendo $dh \rightarrow 0$:

$$E_{t2}(\vec{r}_S) - E_{t1}(\vec{r}_S) = 0$$

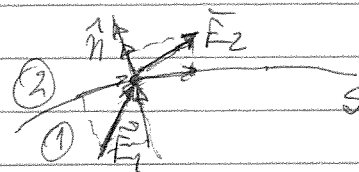


Assim, a componente tangencial à superfície S do campo elétrico é contínua.

2.18C

- Combinando numa única expressão os resultados anteriores:

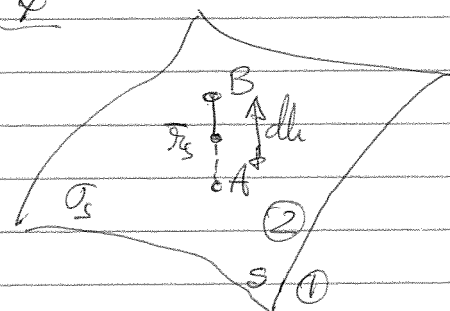
$$\vec{E}_2(\vec{r}_s) - \vec{E}_1(\vec{r}_s) = \frac{\sigma_s(\vec{r}_s)}{\epsilon_0} \hat{n}$$



Assim, existindo carga superficial, as linhas de campo reorientam-se na superfície S .

• Condições fronteira do potencial elétrico ϕ

Como: $\phi_2 - \phi_1 = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$, considerando um percurso elementar como representado na figura, quando $dh \rightarrow 0$ resulta:



$$\phi_2(\vec{r}_s) - \phi_1(\vec{r}_s) = 0$$

ou seja, o potencial é sempre contínuo.

Como $\vec{E} = -\nabla\phi$, resulta:

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial n} - \frac{\partial\phi_1}{\partial n} = -\frac{\sigma_s}{\epsilon_0}$$

sendo: $\partial\phi/\partial n = \nabla\phi \cdot \hat{n}$ a derivada direcional de ϕ segundo a normal à superfície S .

Assim, ϕ é contínuo em S , mas a sua derivada $\partial\phi/\partial n$ apresenta discontinuidade se $\sigma_s \neq 0$.

aplicam-se em S e J , em que o raio de J é feito tender para infinito. Resulta daí a condição $\phi=0$ no infinito como condição fronteira. 2.19

Como a solução do "problema eletrostático geral" é única, tal implica que, uma vez determinada por um qualquer método apropriado uma solução, essa seja a solução do problema. Uma vez determinada a função potencial ϕ , é imediato calcular o campo eléctrico, por simples diferenciação ($\vec{E} = -\nabla\phi$).

Em certos problemas simples, com elevado grau de simetria, é possível obter, por via analítica, a função potencial eléctrico ϕ , recorrendo nomeadamente ao método dos harmónicos rectangulares, cilíndricos ou esféricos (de acordo com a simetria do problema), conforme se analisa no Capítulo Contudo, na generalidade das situações (condições fronteira umas simples, na superfície de condutores com formas complexas), é necessário recorrer a técnicas numéricas e computação (usando, nomeadamente, os métodos de diferenças finitas ou elementos finitos). Em certos casos, o "método das imagens" permite obter a solução por comparação directa do problema em causa com um outro "problema análogo" cuja solução é conhecida, tal como discutido no Capítulo

Note-se ainda que, como um campo electrostático se verifica que $\nabla \times \vec{E} = 0$, usando uma identidade vectorial, resulta

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = 0$$

Como numa região sem cargas se tem $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, vem neste caso

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = 0} \quad (\text{numa região sem cargas})$$

Em geral, a expressão do laplaciano de um vector não é simples (ver Apêndice ...). Todavia, em coordenadas cartesianas, vem

$$\nabla^2 \vec{E} = \nabla^2 E_x \hat{x} + \nabla^2 E_y \hat{y} + \nabla^2 E_z \hat{z}$$

donde resulta

$$\boxed{[\nabla^2 E_x = \nabla^2 E_y = \nabla^2 E_z = 0]} \quad (\text{região sem cargas})$$

Em coordenadas cilíndricas, e para a componente $\hat{z}$, também resulta $[\nabla^2 E_z = 0]$.