

$$\vec{E}_r(r) = \begin{cases} \hat{r} \frac{\sigma_s(a)^2}{\epsilon_0} = \hat{r} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{para } r > a \\ 0 & \text{para } r < a \end{cases}$$

— Esfera carregada com densidade volumétrica de carga $\sigma_v(r)$

Dada a simetria radial da distribuição volumétrica de carga, que ocupa o volume esférico de raio a , o campo elétrico deverá ser da forma $\vec{E} = E_r(r)\hat{r}$ em todo o espaço. Considerando novamente

superfícies de Gauss (SG) esféricas

centradas, tem-se:

$$\epsilon_0 E_r(r) \cdot 4\pi r^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \sigma_v(r') r'^2 \sin\theta dr' d\theta d\phi =$$

$$= \int_0^r \sigma_v(r') 4\pi r'^2 dr'$$

donde:

$$\left[\begin{array}{l} \underline{r < a}: \epsilon_0 E_r(r) 4\pi r^2 = \int_0^r \sigma_v(r') 4\pi r'^2 dr' \\ \underline{r > a}: \epsilon_0 E_r(r) 4\pi r^2 = \int_0^a \sigma_v(r') 4\pi r'^2 dr' = q, \text{ donde} \end{array} \right.$$

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

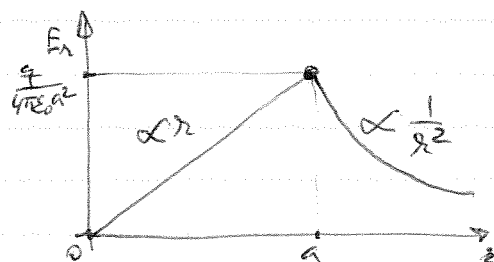
em que q é a carga total da esfera.

Novamente, no exterior da esfera, o campo coincide com o campo elétrico da carga total q situada no centro da esfera. No caso particular de σ_v constante, resulta

$$q = \frac{4}{3} \pi a^3 \sigma_v, \text{ e vem:}$$

$$\left[\begin{array}{l} \underline{r < a}: \epsilon_0 E_r(r) 4\pi r^2 = \frac{4}{3} \pi r^3 \sigma_v = q \left(\frac{r}{a}\right)^3, \text{ donde} \\ \underline{r > a}: E_r(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \end{array} \right. \quad E_r(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r}{a^3}\right)$$

De notar que, neste caso de distribuição puramente volumétrica de carga $\sigma_v(r)$, não ocorre descontinuidade do campo elétrico.



— Superfícies esféricas concêntricas com cargas simétricas
 Suponham as superfícies esféricas concêntricas de raios a e b ($b > a$), carregadas com cargas totais $-q$ e

Campo elétrico médio sobre um volume esférico onde se localiza uma carga pontual q

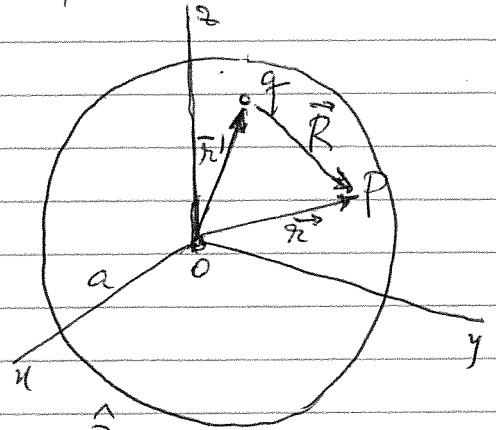
Seja uma esfera centrada na origem O , de raio a , e uma carga pontual q em $\vec{r}'$, no interior da esfera. Considere-se um ponto $P(\vec{r})$ no interior da esfera.

O campo elétrico da carga q em P vale

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \hat{R}, \text{ sendo } \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'.$$

O valor médio de $\vec{E}$ sobre o volume da esfera de raio a é:

$$\langle \vec{E} \rangle = \frac{1}{\left[\frac{4}{3}\pi a^3\right]} \int_{V_{\text{esfera}}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{R} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_{\text{esfera}}} \frac{q}{\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) R^2} \hat{R} dV'$$



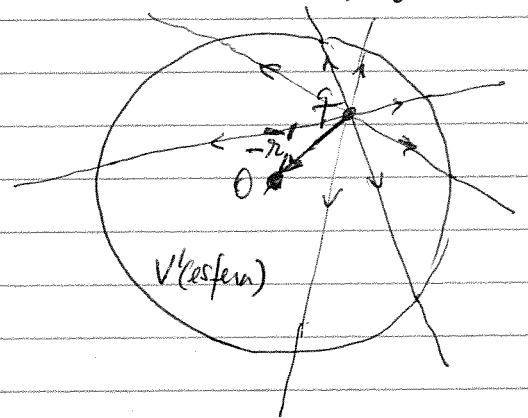
Se, em vez da carga pontual q em $\vec{r}'$, existir uma distribuição uniforme de carga na esfera de densidade volumétrica $\sigma_v = q / (\frac{4}{3}\pi a^3)$, então o campo elétrico dessa distribuição em $\vec{r}'$ será: $\vec{E}(\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_{\text{esfera}}} \frac{\sigma_v}{R^2} \hat{R} dV' = \sigma_v \frac{\vec{r}'}{3\epsilon_0}$.

(como calculado para σ_v constante, no exemplo anterior).

Assim:

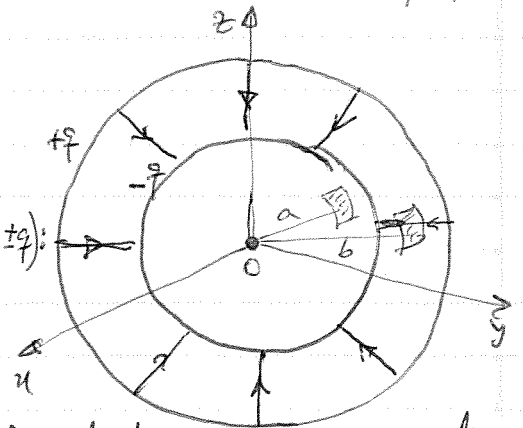
$$\langle \vec{E} \rangle = \sigma_v \frac{\vec{r}'}{3\epsilon_0} (-\hat{r}') = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \cdot \frac{\vec{r}'}{3\epsilon_0} (-\hat{r}') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^3} (-\vec{r}')$$

(com o sentido de $-\vec{r}'$, como se indica da representação de linhas de campo da figura).



$+q$ ($q > 0$), respectivamente, sendo as distribuições superficiais uniformes. Trata-se de um "condensador esférico", como ilustrado na figura, em que o campo elétrico é da forma $\vec{E} = E_r(r) \hat{r}$, sendo (sobreposição dos campos de $\pm q$):

$$\left[\begin{array}{l} r < a: E = 0 \\ a < r < b: \epsilon_0 E_r(r) \cdot 4\pi r^2 = -q \\ \text{donde: } E_r(r) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ b < r: E = 0 \end{array} \right]$$



[As linhas de campo são radiais, ligando cargas superficiais opostas]

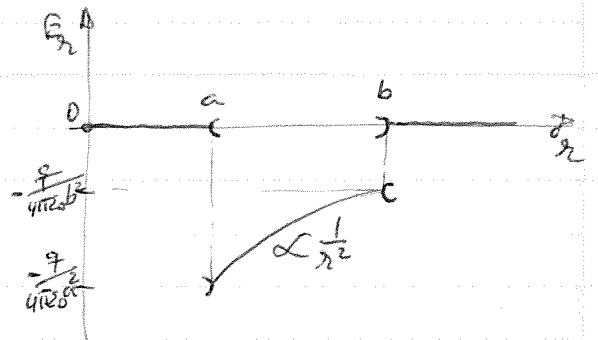
Note-se que as densidades superficiais de carga são simétricas:

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_s(r=a) = -\frac{q}{4\pi a^2} \\ \sigma_s(r=b) = +\frac{q}{4\pi b^2} \end{array} \right]$$

Se os raios das superfícies são próximos, $a \approx b$, então $\sigma_s(r=a) \approx -\sigma_s(r=b)$.

O campo elétrico apresenta um descontinuidade em $r=a, b$, sendo as descontinuidades:

$$\left[\begin{array}{l} r=a: -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{4\pi a^2 \sigma_s(a)}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{\sigma_s(a)}{\epsilon_0} \\ r=b: \frac{q}{4\pi b^2} = \frac{4\pi b^2 \sigma_s(b)}{4\pi b^2} = \frac{\sigma_s(b)}{\epsilon_0} \end{array} \right]$$



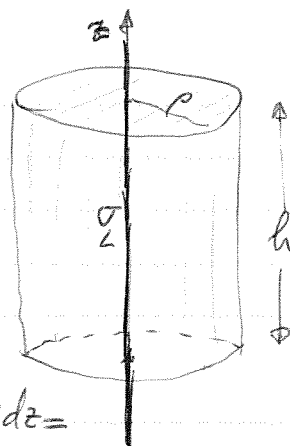
O campo elétrico é nulo no exterior do condensador. O campo da carga $+q$ "blinda" o campo da carga $-q$ para o exterior.

Outros casos de distribuições esféricas de carga da forma $\sigma_s(r)$, tais como uma "casca esférica" carregada ou uma distribuição evanescente de carga (proporcional a $\exp(-r/a)$ ou a $\exp(-r^2/a^2)$) podem ser abordados de forma análoga.

— Distribuições retilíneas uniformes de carga

Seja uma densidade linear de carga σ_L localizada no eixo zz . O campo elétrico deverá ter simetria cilíndrica em torno de zz , ou seja, $\vec{E} = E_\rho(\rho) \hat{\rho}$. Considere-se uma superfície de Gauss (fechada) constituída por

uma superfície cilíndrica de altura h e duas bases circulares normais a z , como mostra a figura. Não há fluxo de $\vec{E}$ através das bases, mas apenas através da superfície cilíndrica de raio ρ e altura h :



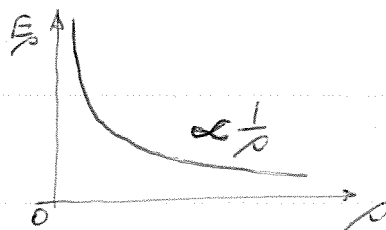
$$\epsilon_0 \oint_{SG} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \epsilon_0 \int_{S_{\text{cilind.}}} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \epsilon_0 \int_0^{2\pi} \int_z^{z+h} E_\rho(\rho) \rho d\phi dz =$$

$$= \epsilon_0 E(\rho) \rho 2\pi h$$

Donde, pela lei de Gauss: $\epsilon_0 E_\rho(\rho) \rho 2\pi h = h \sigma_L$, e vem

$$\left[E_\rho(\rho) = \frac{\sigma_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} \right]$$

Note-se a divergência do campo para $\rho \rightarrow 0$.



Cilindro (infinito) uniformemente carregado

O campo, por simetria, será ainda da forma $E_\rho(\rho) \hat{\rho}$. Se forma análoga à do exemplo anterior, usando uma SG do mesmo tipo, vem:

$$\epsilon_0 \oint_{SG} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \epsilon_0 \int_{S_{\text{cilind.}}} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \epsilon_0 E_\rho(\rho) \rho 2\pi h$$

A densidade de carga por unidade de comprimento axial é $\sigma_L = \sigma_v \pi a^2$.

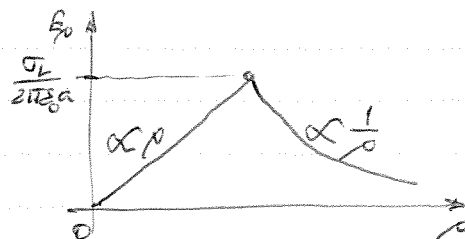
Resulta: $\left\{ \begin{array}{l} \rho \leq a: \epsilon_0 E_\rho(\rho) \rho 2\pi h = \sigma_v \pi \rho^2 h = \sigma_L \frac{\rho^2 h}{a^2} \\ \text{donde:} \end{array} \right.$

$$E_\rho(\rho) = \frac{\sigma_L}{2\pi\epsilon_0 a^2} \cdot \rho$$

$\left\{ \begin{array}{l} \rho \geq a: \epsilon_0 E_\rho(\rho) \rho 2\pi h = \sigma_v \cdot \pi a^2 h = \sigma_L h \\ \text{donde:} \end{array} \right.$

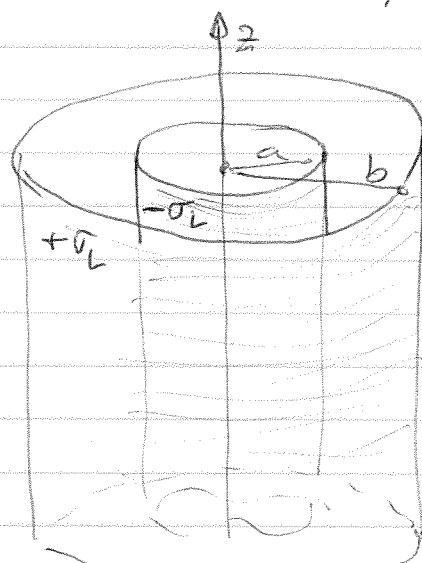
$$\left[E_\rho(\rho) = \frac{\sigma_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} \right]$$

Não existindo carga superficial na superfície $\rho = a$, o campo é contínuo em todo o espaço. No exterior do cilindro, o campo coincide com o campo de uma distribuição retilínea axial σ_L .



— Superfícies cilíndricas coaxiais, carregadas simetricamente

Dois superfícies cilíndricas coaxiais de raios a, b ($b > a$) constituem um condensador cilíndrico infinito. Considera-se cargas distribuídas uniformemente nestas superfícies, a que correspondem densidades lineares $\pm \sigma_L$ ($\sigma_L > 0$) por unidade de comprimento axial. Usando uma análise semelhante à dos exemplos anteriores, resulta para $\vec{E} = E_\rho(\rho) \hat{\rho}$:

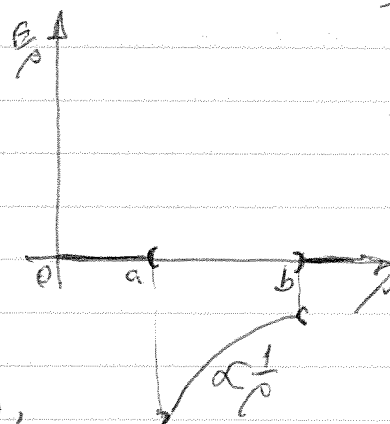


$$\left[\begin{array}{l} \rho < a: E_\rho = 0 \\ a < \rho < b: E_\rho(\rho) = -\frac{\sigma_L}{2\pi\epsilon_0\rho} \\ b < \rho: E_\rho = 0 \end{array} \right]$$

As linhas de campo são radiais, entre as duas superfícies cilíndricas

As densidades de carga superficial, não são simétricas, e valem:

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_s(\rho=a) = -\frac{\sigma_L}{2\pi a} \\ \sigma_s(\rho=b) = +\frac{\sigma_L}{2\pi b} \end{array} \right]$$



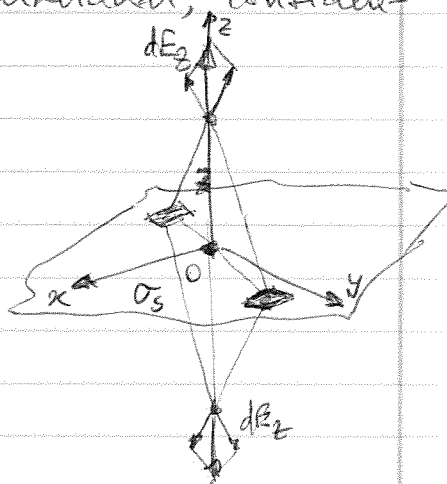
Todavia, se $a \approx b$, então $\sigma_s(a) \approx -\sigma_s(b)$

As discontinuidades de $E_\rho(\rho)$ em $\rho = a, b$ resultam das cargas nessas superfícies, valendo $\sigma_s(a)/\epsilon_0$ e $\sigma_s(b)/\epsilon_0$, respectivamente. De notar a ausência do campo eléctrico no exterior do condensador ($\rho < a$ e $\rho > b$).

— Plano carregado uniformemente

Seja um plano carregado uniformemente com densidade de carga $\sigma_s > 0$. Sem perda de generalidade, considere o plano Oxy e o cálculo do campo eléctrico no eixo zz normal ao plano.

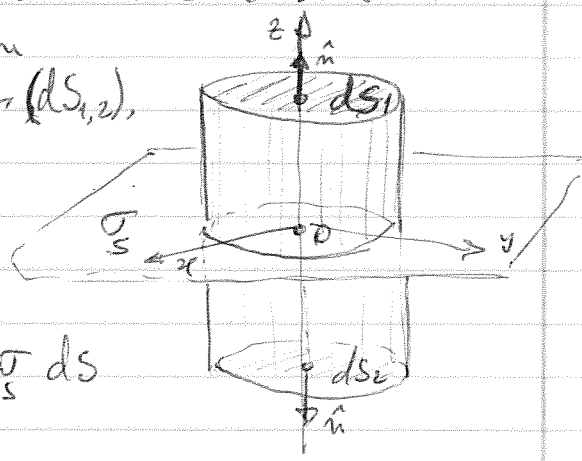
O campo deverá ser da forma $\vec{E} = E_z(z) \hat{z}$, com $E_z(z) = -E_z(-z)$, o que se conclui considerando os campos devido a duas elementares do plano simétricas relativamente ao eixo zz , como mostra a figura.



Tomando uma superfície de Gauss cilíndrica com bases em $\pm z$ e eixo segundo z , verifica-se que só há fluxo de $\vec{E}$ através das bases ($dS_{1,2}$), sendo as contribuições iguais:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \epsilon_0 \left[(\vec{E}_z(z) \cdot \hat{z} dS_1) + (\vec{E}_z(-z) \cdot (-\hat{z}) dS_2) \right] =$$

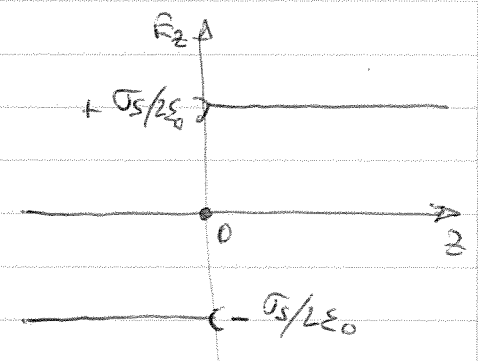
$$= \epsilon_0 \cdot 2 E_z(z) dS = \sigma_s dS$$



donde:

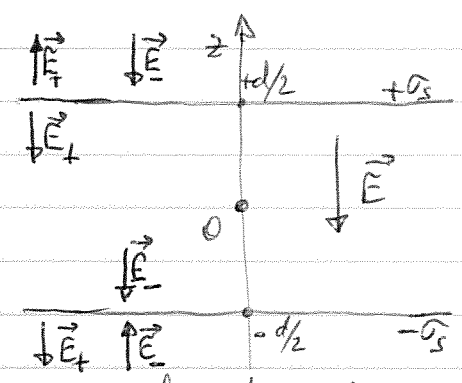
$$\left[E_z = \frac{\sigma_s}{2\epsilon_0} \right]$$

ou seja, a grandezza do campo eléctrico é independente da distância ao plano de carga, ocorrendo uma descontinuidade neste plano com o valor σ_s/ϵ_0 .



— Planas paralelas carregadas simetricamente

Esta configuração corresponde a um condensador plano infinito, em que o campo eléctrico se pode calcular facilmente a partir da situação anterior, por sobreposição dos campos de cada um dos planos carregados uniformemente com densidades simétricas. Assim, sendo os planos normais ao eixo z e localizados em $\pm d/2$, com densidades de carga $\pm \sigma_s$ ($\sigma_s > 0$), respectivamente, vem:

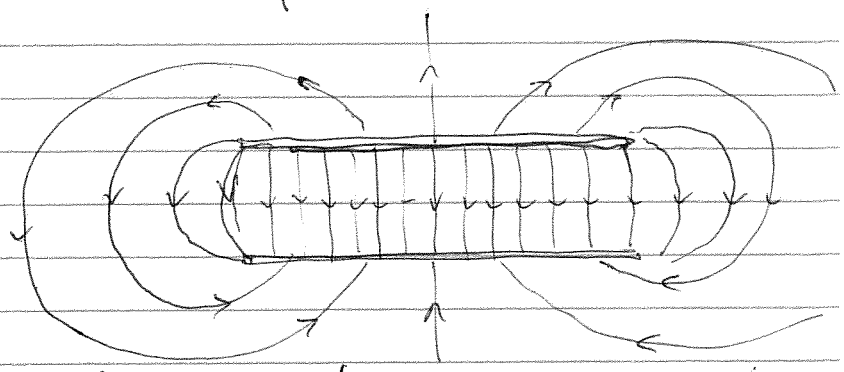


$$\left[\begin{array}{ll} z < -d/2 & : E = 0 \\ -d/2 < z < +d/2 & : E = \sigma_s/\epsilon_0 \\ +d/2 < z & : E = 0 \end{array} \right]$$

Assim, só existe campo no interior do condensador plano, uniforme e normal às armaduras do condensador infinito.

É frequente, na prática, usar esta aproximação de um condensador plano infinito quando a distância entre as armaduras (d) é muito inferior à sua extensão.

Num condensador plano real, as armaduras terão a mesma forma (por exemplo, circular), mas área finita. Bem no interior das armaduras, o campo será ainda praticamente uniforme, mas não é claramente uniforme junto aos bordos das armaduras.



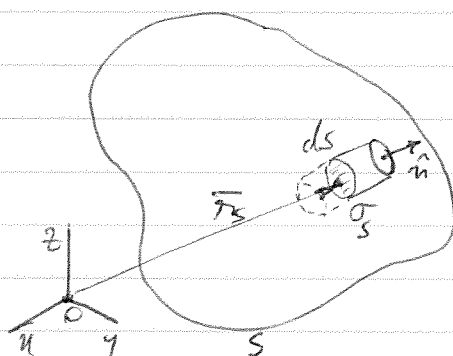
O cálculo do campo envolve técnicas mais avançadas, incluindo métodos numéricos/computacionais.

As densidades superficiais de carga nas armaduras, que eram uniformes no caso de um condensador idealizado infinito, são agora substituídas por densidades não-uniformes e sobre as superfícies interiores e exteriores das armaduras finitas.

Condutor fechado carregado: campo na superfície

Seja um condutor fechado de forma arbitrária, carregado electricamente e em equilíbrio estático.

O campo eléctrico no interior da superfície deverá ser nulo, caso contrário haveria força eléctrica sobre as cargas livres do condutor que, assim, não poderia estar em equilíbrio estático. Conclui-se, portanto, que as cargas deverão situar-se na superfície, devido à repulsão electrostática mútua.



O campo em pontos da superfície (r_s) não poderá também ter componente tangencial à superfície, pois tal implicaria movimento de cargas nessa superfície, o que contraria a hipótese de se tratar de uma situação estática.

Seja $\sigma_s(r_s)$ a densidade superficial de carga num ponto da superfície (σ_s não é constante, em geral, sobre a superfície). Tomando como superfície de Gauss um cilindro elementar de altura h e secção ds na superfície carregada, sendo o eixo normal à superfície e ds centrado no ponto r_s , fazendo $h \rightarrow 0$ só existirá fluxo de $\vec{E}$ através da base exterior, donde

$$\epsilon_0 \vec{E}(r_s) \cdot \hat{n} ds = \sigma_s(r_s) ds$$

e vem

$$\left[\vec{E}(r_s) = \frac{\sigma_s(r_s)}{\epsilon_0} \hat{n} \right]$$

O campo eléctrico tem uma descontinuidade σ_s/ϵ_0 na superfície, assumindo o valor médio dos campos interior e exterior a grandeza $\sigma_s(r_s)/2\epsilon_0$.

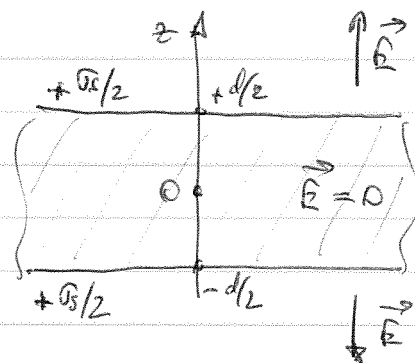
Uma situação simples é em que σ_s é constante e a de uma esfera carregada (q) centrada na origem e de raio a , em que o campo na superfície vale $\vec{E}(r=a) = \frac{\sigma_s}{\epsilon_0} \hat{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \hat{r}$.

Considere-se agora um condutor limitado por dois planos paralelos situados em $z = \pm d/2$, carregado uniformemente com uma densidade $\sigma_s > 0$ por unidade de área. Essa carga deverá distribuir-se apenas nas

Superfícies planas que limitam o meio condutor, e de forma simétrica.

Assim, o problema é equivalente ao de duas superfícies planas carregadas com densidades $+\sigma/2$, resultando em

$$\begin{cases} z < -d/2 : E_z = -\sigma/2 \\ -d/2 < z < +d/2 : E_z = 0 \\ +d/2 < z : E_z = +\sigma/2 \end{cases}$$



O campo anula-se no interior do condutor, como é necessário para o equilíbrio eletrostático.

1.10. Condutores isolados em campos eletrostáticos

Num condutor homogêneo carregado e isolado, as cargas livres (elétrons de condução) deslocam-se para posição de equilíbrio. Carga estática não compensada aparece apenas na superfície do condutor, sendo o campo elétrico nulo no interior do condutor e valendo $\sigma/\epsilon_0 \hat{n}$ na superfície (em que $\hat{n}$ é o vetor normal à superfície, orientado para o exterior). De notar que o campo num ponto da superfície do condutor é totalmente determinado pela densidade superficial de carga local. Na realidade, a distribuição de carga existe numa camada de pequena espessura (da ordem de uma camada atômica) adjacente à superfície.

No interior do condutor, é o valor médio temporal e espacial do campo elétrico que se anula, pois o campo apresenta variações temporais e espaciais enormes à escala atômica.

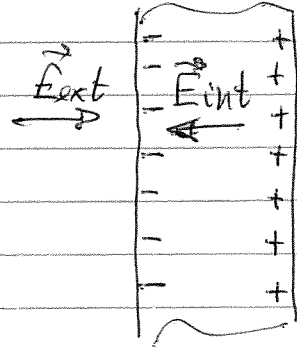
Quando o campo elétrico na superfície de um condutor atinge uma grandeza apreciável, pode remover carga elétrica dessa superfície, particularmente em zonas de pequeno raio de curvatura onde a densidade de carga é mais elevada e, portanto, o campo elétrico assume maior amplitude (como se verá adiante). Este fenómeno é designado por emissão electrónica de campo.

No caso de um condutor oco, com uma carga q (pontual ou distribuída espacialmente) no interior da cavidade como representado na figura, conside-

Num isolador (como borracha, vidro, ...), cada elétron está ligado a um átomo específico do material, enquanto que num condutor, um (ou mais) elétrons de cada átomo é praticamente livre de se mover no meio material. No caso de líquidos condutores, os portadores de carga móveis são iões; num plasma, além de elétrons livres há iões móveis. Num condutor perfeito ou ideal (há muitos condutores quase ideais...) existe uma disponibilidade quase ilimitada de criação de elétrons livres.

Em condutores ideais em equilíbrio eletrostático, o campo elétrico é nulo no seu interior. Se o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$ não fosse nulo no interior do condutor ideal, as cargas livres mover-se-iam atiradas pelo campo e o condutor não estaria em equilíbrio eletrostático.

Examina-se o que acontece a um condutor quando lhe é aplicado um campo elétrico externo $\vec{E}_{ext}$, recorrendo ao exemplo de uma lâmina condutora de espessura t , e campo externo normal à lâmina. O campo externo faz deslocar as cargas

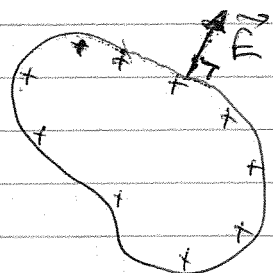


livres negativas (elétrons num metal) para a esquerda, deixando carga positiva do lado direito não-compensada (núcleos + elétrons ligados dos átomos de um metal). Estas distribuições induzidas de carga produzem um

campo elétrico $\vec{E}_{int}$ de sentido oposto ao de $\vec{E}_{ext}$. Atinge-se rapidamente o equilíbrio, em que no interior do condutor $\vec{E} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{int} = \vec{0}$. No exterior do condutor, os campos não se cancelam mutuamente.

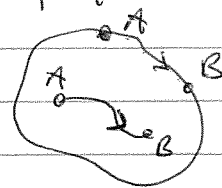
Se no interior do condutor, resulta da lei de Gauss diferencial ($\nabla \cdot \vec{E} = \rho_v / \epsilon_0$) que $\rho_v = 0$: existe equilíbrio local de cargas positivas (ρ_v^+) e negativas (ρ_v^-) de modo que $\rho_v = \rho_v^+ + \rho_v^- = 0$.

O campo elétrico na vizinhança exterior imediata da superfície do condutor é perpendicular à superfície. Se existisse uma componente tangencial à superfície do condutor, ocorreria movimento de carga até se estabelecer o equilíbrio, anulando essa componente tangencial do campo elétrico.



Carga elétrica introduzida no interior de um condutor flui quase instantaneamente para a superfície, devido à

repulsão de Coulomb. A configuração final das cargas correspon- 1.27b
 derá à minimização da energia potencial elétrica da configuração.
 Como discutido no capítulo seguinte, o interior e a superfície
 do condutor estão ao mesmo potencial elétrico. De
 facto, considerando dois pontos (A,B) no interior ou
 na superfície do condutor: $\phi(B) - \phi(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$
 pois $\vec{E} = \vec{0}$ no interior, e na superfície $\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$.

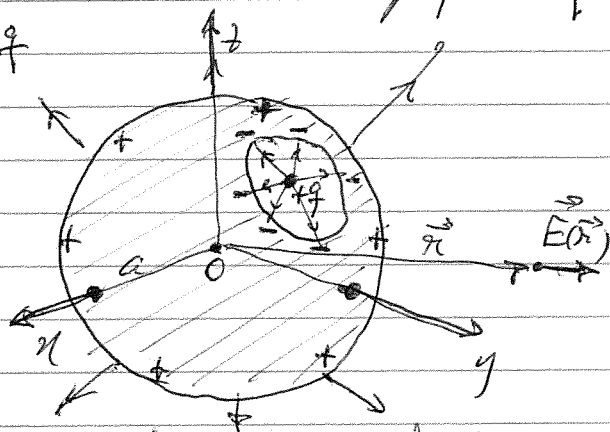


Condutor oco e carga na cavidade

Considere-se o exemplo de um condutor esférico (raio a) em equilíbrio
 e sem carga, centrado na origem. No seu interior, existe uma
 cavidade com forma arbitrária, onde está colocada uma carga pontual $+q$.

Essa carga $+q$ induz uma carga total $-q$
 na superfície da cavidade, distribuída de
 tal modo que resulta no interior do
 condutor um campo elétrico nulo.

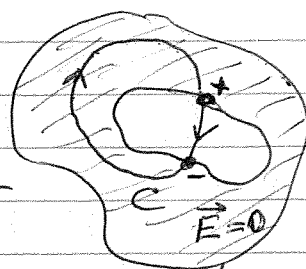
Se não nula a carga total do condutor,
 deverá existir, portanto, uma distri-
 bução uniforme de carga na superfície
 esférica externa, de valor total $+q$.



Diz-se que a carga $-q$ distribuída na superfície da cavidade,
 efetua a blindagem, para o seu exterior (o condutor) do campo
 elétrico da carga pontual $+q$ na cavidade. Por sua vez, a
 carga $+q$ distribuída na superfície esférica de raio a cria, para o
 exterior, um campo elétrico $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$ ($r > a$).

O campo na cavidade não é nulo, e as suas linhas de campo não
 são, geralmente, uniformemente distribuídas.

No caso de não existir carga elétrica no interior da cavidade ($+q=0$), o
 integral de linha $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ é nulo, para qualquer percurso C . Como
 $\vec{E} = 0$ no condutor, se existissem cargas na super-
 fície da cavidade resultaria um integral de linha
 maior que zero, o que não é possível. Assim,
 o campo na cavidade é nulo e não existe distri-
 bução de carga na superfície da cavidade.



O condutor oco constitui uma Gaiola de Faraday, que realiza a
 blindagem de campo elétrico do exterior para o interior da
 cavidade. Na prática, usa-se frequentemente uma rede

condutora metálica suficientemente densa, em vez de um condutor contínuo como acima representado.

1.27c

Exemplo:

Um condutor esférico (raio a , carga q) está rodeado por uma "casca esférica" condutora (raios b, c ; $b < c$; $b > a$) sem carga, como mostra a figura. A carga na esfera de raio a situa-se na sua superfície, assegurando campo nulo no seu interior. A densidade superficial de carga é $\sigma_s(a) = q/(4\pi a^2)$.

Na superfície interna da "casca esférica" existe uma densidade de carga $\sigma_s(b) = -q/(4\pi b^2)$, que assegura campo elétrico nulo no interior dessa região, e que corresponde a uma carga total $-q$. Como é nula a carga total dessa "casca esférica", deverá existir uma carga total $+q$ na respetiva superfície externa, distribuída uniformemente com densidade $\sigma_s(c) = +q/(4\pi c^2)$.

Considerando o sistema centrado na origem O , o campo elétrico tem simetria esférica ($\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$), sendo:

$$r < a: E(r) = 0$$

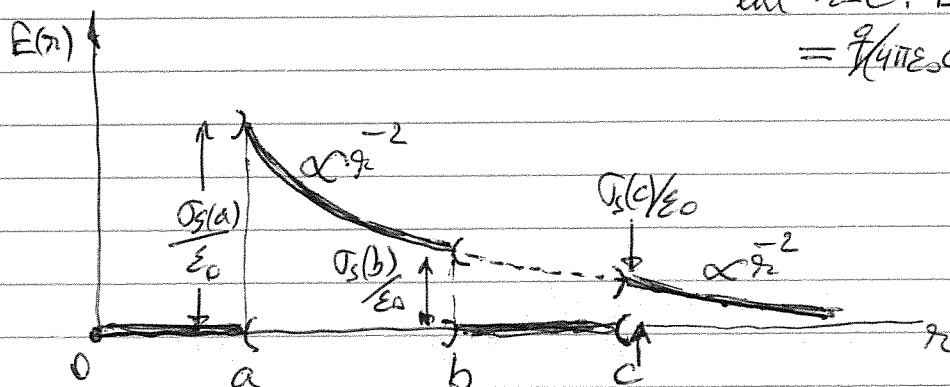
$$a < r < b: E(r) = q/(4\pi\epsilon_0 r^2) \quad ; \text{descontinuidade em } r=b:$$

$$b < r < c: E(r) = 0$$

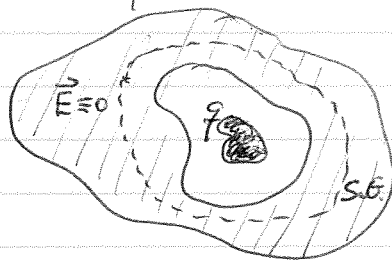
$$c < r: E(r) = q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$$

$$E(b^+) - E(b^-) = 0 - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b^2} = \frac{\sigma_s(b)}{\epsilon_0}$$

$$\text{em } r=c: E(c^+) - E(c^-) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} - 0 = \frac{\sigma_s(c)}{\epsilon_0}$$



rando uma superfície de Gauss (SG) no volume do condutor, onde o campo eléctrico é nulo pela condição de equilíbrio estático, conclui-se da lei de Gauss que a carga no interior da SG deve ser nula. Daí que exista uma carga total $-q$ distribuída na superfície interior do condutor. Nessa altura, se o condutor tiver carga total nula, tal implica que exista na superfície exterior do condutor uma carga distribuída total $+q$. A densidade superficial de carga nessa superfície exterior é independente da distribuição específica de carga no interior da cavidade e é igual à de um condutor maciço com carga total $+q$. Reciprocamente, o campo na cavidade é independente do campo exterior ao condutor.



Em conclusão, o condutor oco actua como uma blindagem electrostática.

1.11. Lei de Gauss: forma diferencial

Aplicando o teorema de Gauss-Green (ver Apêndice...) à forma integral da lei de Gauss anteriormente obtida,

$$\epsilon_0 \oint_{SG} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \int_V \sigma_v dv$$

resulta: $\epsilon_0 \oint_{SG} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \epsilon_0 \int_V \nabla \cdot \vec{E} dv = \int_V \sigma_v dv$

para qualquer superfície de Gauss (SG) limitando o volume V . Assim:

$$\boxed{\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \sigma_v}$$

que é a forma diferencial da lei de Gauss. Trata-se de uma relação local entre o valor da densidade volumétrica de carga (σ_v) e o valor, nesse ponto, de $\nabla \cdot \vec{E}$. Em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas resultam as seguintes equações de derivadas parciais, numa situação genérica:

C. cartesianas: $\epsilon_0 \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right] = \sigma_v$

C. cilíndricas: $\epsilon_0 \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right] = \sigma_v$

1.28a

Resulta, da lei de Coulomb e do princípio de superposição linear, que o campo elétrico de uma distribuição de carga de densidade $\rho_v(\vec{r}')$ é dado por:
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Todo o Espaço}} \rho_v(\vec{r}') \frac{\vec{R}}{R^2} dV'$$

sendo: $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$.

Resulta:
$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Todo o Espaço}} \rho_v(\vec{r}') \nabla \cdot \left(\frac{\vec{R}}{R^2} \right) dV',$$
 pois o operador ∇ aplica-se em $\vec{r}$.

Ora:
$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{R}}{R^2} \right) = \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) = 4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = 4\pi \delta^3(\vec{R}),$$
 sendo $\delta^3(\vec{R})$ a distribuição de Dirac (3D).

Assim:
$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Todo o Espaço}} 4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \rho_v(\vec{r}') dV' = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_v(\vec{r})$$

Resulta a lei de Gauss na forma diferencial:

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \rho_v(\vec{r})$$

Claro que, recorrendo a integração num volume V qualquer e aplicando o teorema de Gauss-Green (ver Apêndice...), se obtém a forma integral:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \oint_{S(V)} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_v dV = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{int}}(s)$$

C. esféricas: $\epsilon_0 \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta E_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} \right] = \rho$

Estas equações tem de ser resolvidas, respeitando ainda condições nas fronteiras dos condutores (campo normal à superfície e com grandeza σ_s/ϵ_0). Nas superfícies de fronteira, define-se a divergência superficial

$$\nabla_s \cdot \vec{E} = \hat{n} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)$$

em que $\hat{n}$ é o vetor normal à superfície, orientado do meio 1 para o meio 2, e $\vec{E}_{1,2}$ é o campo elétrico adjacente à superfície, no meio respectivo. Vem, então, na superfície dos condutores, que

$$\epsilon_0 \nabla_s \cdot \vec{E} = \sigma_s$$

Os problemas simplificam-se consideravelmente no caso de simetrias fortes na distribuição de carga e na forma das fronteiras, como se mostra na secção seguinte com vários exemplos.

1.12. Exemplos de aplicação da lei de Gauss na forma diferencial

Os seguintes exemplos de determinar do campo elétrico em situações de elevada simetria ilustram a metodologia de resolver da lei de Gauss na forma diferencial, tendo em conta as condições fronteira.

— Esfera carregada uniformemente

Seja a seguinte função densidade volumétrica de carga:

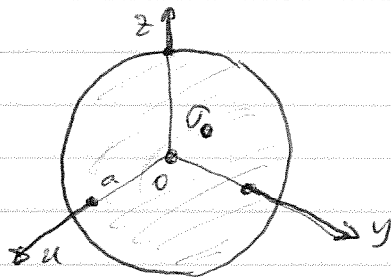
$$\rho_v(r) = \begin{cases} \sigma_0 & , r \leq a \\ 0 & , r > a \end{cases}$$

Como, por simetria, deve ser $\vec{E} = E_r(r) \hat{r}$, a equação diferencial que exprime a lei de Gauss escreve-se

$$\epsilon_0 \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E_r) \right] = \rho_v(r)$$

Donde: $r > a$: $\rho_v(r) = 0$, e vem $\frac{d}{dr} (r^2 E_r) = 0$

de que resulta: $E_r = \frac{C_1}{r^2}$ (C_1 : constante de integração)



$r < a$: $\sigma_v(r) = \sigma_0$, e vem $\frac{d}{dr}(r^2 E_r) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} r^2$

de que resulta: $r^2 E_r = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} r^3 + C_2$

$E_r = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} r + \frac{C_2}{r^2}$ (C_2 : constante de integração)

Deverá ser $C_2 = 0$ para que o campo não diverja em $r=0$, ou seja $E_r(0) = 0$. Assim: $E_r = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} r = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} r$ sendo γ a carga total da esfera.

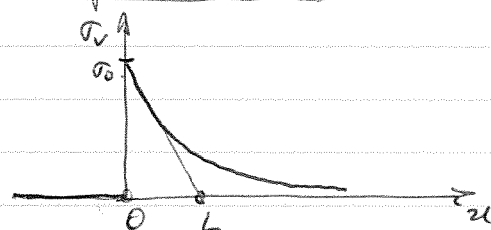
Como não há carga distribuída na superfície esférica $r=a$, $E_r(a^-) = E_r(a^+)$, donde

$\frac{C_1}{a^2} = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} a$, ou seja, $C_1 = \frac{\sigma_0 a^3}{3\epsilon_0} = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0}$

Obtem-se, assim, a solução anteriormente calculada (Seção 1.8).

Distribuição unidimensional de carga volumica

Seja $\sigma_v(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ -x/L & , x > 0 \end{cases}$



O campo elétrico deverá ser da forma $\vec{E} = E_r(x) \hat{n}$, por simetria.

Vem então: $\begin{cases} \frac{dE_r}{dx} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} e^{-x/L} & , x > 0 \\ \frac{dE_r}{dx} = 0 & , x < 0 \end{cases}$

Resulta: $E_r(x < 0) = C_1$

$E_r(x > 0) = -\frac{\sigma_0 L}{\epsilon_0} e^{-x/L} + C_2$

Atendendo à continuidade de E_r em $x=0$: $C_1 = -\frac{\sigma_0 L}{\epsilon_0} + C_2$

O campo $E_r(x > 0)$ converge para C_2 para $x \rightarrow +\infty$; por simetria, deverá ter-se $E_r(x < 0, x \rightarrow -\infty) = -E_r(x > 0, x \rightarrow +\infty)$, donde resulta: $C_1 = -C_2$

Destas condições conclui-se que $\begin{cases} C_1 = -\frac{\sigma_0 L}{2\epsilon_0} \\ C_2 = +\frac{\sigma_0 L}{2\epsilon_0} \end{cases}$

Calculando a carga total da distribuição volumica por

unidade de área normal a xx , vem

$$q_0 = \int_0^{\infty} \sigma_v(u) du = \int_0^{\infty} \sigma_0 e^{-u/L} du = -\sigma_0 L e^{-u/L} \Big|_0^{\infty} = \sigma_0 L$$

Note-se, ainda, que para $x < 0$ e $x \gg L$, o campo elétrico tem uma grandeza constante, correspondente ao campo de uma distribuição superficial uniforme $\sigma_s = q_0$ situada em $x=0$.

— Campo elétrico com simetria cilíndrica

Considere-se um campo elétrico com simetria cilíndrica dado por

$$\vec{E} = \begin{cases} E_0 (\rho/a)^3 \hat{\rho} & , 0 < \rho < a \\ 0 & , a < \rho \end{cases}$$

criado por uma distribuição volumétrica de carga, no vácuo.

Como $\vec{E} = E(\rho) \hat{\rho}$, vem que

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho E(\rho)] = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (E_0 \frac{\rho^4}{a^3}) = \frac{4E_0}{a^3} \rho^2 & , \rho < a \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 & , a < \rho \end{cases}$$

Donde:

$$\sigma_v(\rho) = \begin{cases} \frac{4E_0}{\epsilon a^3} \rho^2 & , 0 < \rho < a \\ 0 & , a < \rho \end{cases}$$

O cálculo da densidade superficial de carga em $\rho=a$ é imediato: $\epsilon_0 \nabla_s \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \hat{\rho} \cdot (0 - \frac{E_0}{a^3} \cdot a^3 \hat{\rho}) = -\epsilon E_0 = \sigma_s$

donde: $\sigma_s(\rho=a) = -\epsilon E_0$

— Campo dipolar

Assumindo coordenadas esféricas, e numa região $r > R$, no vácuo, suficientemente afastada da origem, seja um campo elétrico da forma

$$\vec{E}(r, \theta, \phi) = C \left(\frac{2 \cos \theta}{r^3}, \frac{\sin \theta}{r^3}, 0 \right); \quad C: \text{constante}$$

A densidade volumétrica de carga nessa região $r > R$ pode ser determinada a partir da lei de Gauss, neste espaço: $\sigma_v = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$. Mas

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (E_\theta \sin \theta) = \\ &= -2C \frac{\cos \theta}{r^4} + 2C \frac{\cos \theta}{r^4} = 0 \end{aligned}$$

Conclui-se que $\sigma_v = 0$ nessa região. Comparando a expressão do campo elétrico com o devido a um dipolo elétrico situado na origem, esta resultada torna-se óbvia.

1.13. Caráter conservativo do campo eletrostático

Conforme discutido na seção 1.4., o campo elétrico no vácuo resultante de uma distribuição de carga elétrica de densidade volumétrica $\sigma_v(\vec{r}')$ é dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\sigma_v(\vec{r}')}{R^2} \hat{R} dv'$$

com $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$. Substituindo, nesta expressão, a identidade

$$\nabla_{\vec{r}} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{1}{R^2} \hat{R}$$

$$\text{vem: } \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \sigma_v(\vec{r}') \nabla_{\vec{r}} \left(\frac{1}{R} \right) dv' =$$

$$= \nabla_{\vec{r}} \left[-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\sigma_v(\vec{r}')}{R} dv' \right]$$

em que a última transformação é válida pois $\nabla_{\vec{r}}$ não opera sobre $\vec{r}'$. Aplicando o operador rotacional a ambos os membros da equação anterior, e como $\nabla_{\vec{r}} \times \nabla_{\vec{r}} [\dots] \equiv 0$, vem (escrevendo $\nabla \equiv \nabla_{\vec{r}}$, por simplicidade):

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = 0}$$

Diz-se que o campo elétrico estacionário é irrotacional, ou conservativo. Assim, sendo $\nabla \cdot \vec{E}$ e $\nabla \times \vec{E}$ ambos conhecidos numa região finita contendo todas as cargas, o teorema de Helmholtz estabelece que o campo elétrico $\vec{E}$ fica completamente determinado (ver Apêndice...).

Neste caso, como $\nabla \times \vec{E} = 0$, vem

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla \phi}$$

em que ϕ é uma função potencial escalar. Comparando com a equação anterior que fornece o campo elétrico de uma distribuição de carga, conclui-se de imediato que

$$\left[\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\sigma_v(\vec{r}')}{R} dv' \right]$$

A análise de $\phi(\vec{r})$ de distribuições de carga é desenvolvida no capítulo 2.

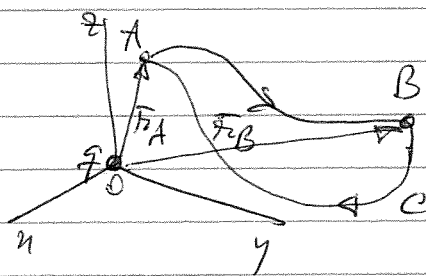
Considere-se a distribuição de carga elétrica mais simples: carga pontual na origem do sistema de eixos coordenados, no vácuo. O campo elétrico resultante é $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r^2} \right) \hat{r}$. Calculando o integral de linha do campo elétrico entre dois pontos (A, B), vem $\int_A^B \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$. Em coordenadas esféricas:

$d\vec{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin\theta d\phi \hat{\phi}$. Resulta, então:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{q}{r^2} dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_{r_A}^{r_B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_A} - \frac{q}{r_B} \right)$$

Para um percurso fechado C, resulta imediatamente que $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

Recorrendo ao teorema de Stokes, vem que $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{E} \cdot \hat{n} dS = 0, \forall C, S(C)$



Assim, deverá ser: $\boxed{\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0}$

O resultado obtido é ainda válido para uma localização arbitrária da carga pontual q. Além disso, recorrendo ao princípio de superposição linear, o campo elétrico de um conjunto de cargas é a soma vetorial dos campos elétricos das cargas desse conjunto: $\vec{E} = \sum_j \vec{E}_j$

Assim:

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \left[\sum_j \vec{E}_j \right] = \sum_j \nabla \times \vec{E}_j = 0$$

Resulta então uma conclusão geral para campo eletrostático $\vec{E}(\vec{r})$ arbitrário, no vácuo: $\boxed{\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0}$

Ora $\vec{E}(\vec{r})$ relaciona-se com a distribuição de carga $\rho_v(\vec{r})$ como: $\boxed{\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \rho_v(\vec{r}) / \epsilon_0}$.

Estas duas relações constituem um par de equações de Maxwell, para campos elétricos estáticos no vácuo.