

B

Operadores Diferenciais

B.1. Campos escalares e campos vectoriais

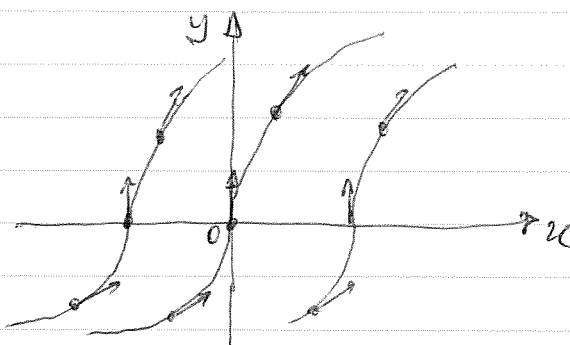
Numa região do espaço, diz-se que nela existe um campo escalar $f(P, t) = f(\vec{r}, t)$ quando é definido, em todos os pontos dessa região, o valor de uma grandeza física (tal como o potencial gravítico, ou o potencial eléctrico). O campo escalar pode ser independente do tempo (t) — campo estático, ou dele depender — campo dinâmico. Quando a grandeza física em causa for do tipo vectorial, diz-se que existe nessa região um campo vectorial $\vec{F}(P, t) = \vec{F}(\vec{r}, t)$, que poderá também ser estático ou dinâmico (tal como os campos eléctricos $\vec{E}$ e magnéticos $\vec{B}$ resultantes de distribuições de cargas e correntes eléctricas). Dependendo do sistema de coordenadas usado, ter-se-á:

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}, t) &= F_x(x, y, z; t) \hat{x} + F_y(x, y, z; t) \hat{y} + F_z(x, y, z; t) \hat{z} \quad (\text{c. cartes.}) \\ \vec{F}(\vec{r}, t) &= F_\rho(\rho, \phi, z; t) \hat{\rho} + F_\phi(\rho, \phi, z; t) \hat{\phi} + F_z(\rho, \phi, z; t) \hat{z} \quad (\text{c. cilínd.}) \\ \vec{F}(\vec{r}, t) &= F_r(r, \theta, \phi; t) \hat{r} + F_\theta(r, \theta, \phi; t) \hat{\theta} + F_\phi(r, \theta, \phi; t) \hat{\phi} \quad (\text{c. esféricas}) \end{aligned}$$

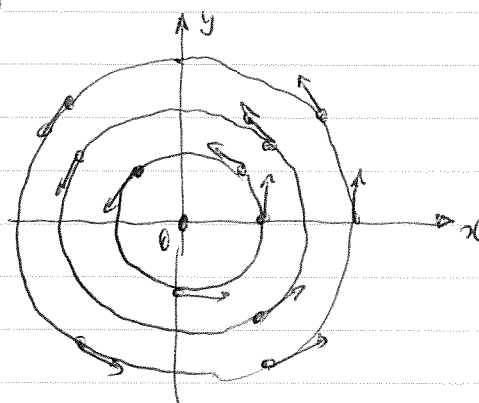
A linha tangente, em cada ponto P , ao vector $\vec{F}(P, t)$, designa-se por linha de campo de $\vec{F}(\vec{r}, t)$.

Exemplos:

$$\Rightarrow \vec{F}(\vec{y}) = y^2 \hat{x} + \hat{y}$$



$$\Rightarrow \vec{F}(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{y}$$



B.2. Gradiente de um campo escalar

Seja uma função escalar $f(P)$, e um vetor $\hat{u}$ que permite definir um ponto Q , próximo de P , tal que $\overrightarrow{PQ} = \Delta l \hat{u}$. Define-se a derivada da função $f(P)$ na direcção e sentido do vetor $\hat{u}$ como

$$\frac{df}{dl} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{f(Q) - f(P)}{\Delta l}$$

Esta derivada depende do vetor $\hat{u}$.

Sejam, agora, duas superfícies próximas tais que:

S : contém o ponto P , e corresponde a $f(P) = C_1$ (constante).

S' : contém os pontos Q e Q_0 , ou seja, $f(Q) = f(Q_0) = C_2$ (constante); o ponto

Q é definido por $\overrightarrow{PQ} = \Delta l \hat{u}$, e o ponto Q_0 é definido por $\overrightarrow{PQ_0} = \Delta l_0 \hat{n}$, em que $\hat{n}$ é o vetor normal à superfície $f(P) = C_1$ no ponto P .

Resulta que $\Delta l_0 = \Delta l \cos(\hat{n}, \hat{u}) = \Delta l \hat{n} \cdot \hat{u}$. Escreve-se, então:

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{f(Q) - f(P)}{\Delta l} = \lim_{\Delta l_0 \rightarrow 0} \frac{f(Q) - f(P)}{\Delta l_0} (\hat{n} \cdot \hat{u}) = \lim_{\Delta l_0 \rightarrow 0} \frac{f(Q_0) - f(P)}{\Delta l_0} (\hat{n} \cdot \hat{u})$$

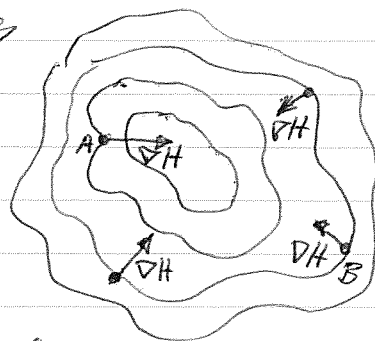
No limite: $\frac{df}{dl} = \frac{df}{dn} \hat{n} \cdot \hat{u}$

Define-se o gradiente de f em P por

$$\boxed{\nabla f = \frac{df}{dn} \hat{n}}$$

Trata-se de um vector com direcção normal à superfície $f(P) = \text{constante}$ (ou seja, para $\hat{u} = \hat{n}$, o que coincide com a direcção da mais rápida taxa de variação da função f), com o sentido da variação crescente de f , e com módulo $|df/dn|$.

Exemplo: A figura mostra um exemplo de curvas de nível de uma carta topográfica. As curvas de nível são lugares de pontos a uma dada altitude H . Na representação habitual, são figuradas apenas curvas para certos valores de altitude, intervalados regularmente (por exemplo, de 10 m). Curvas de nível intermédias podem ser estimadas por interpolação entre as curvas representadas.



O gradiente da altitude H num ponto P é tal que:

- e' perpendicular à curva de nível contendo P ;
- o módulo e' igual à máxima taxa de variação de H com o deslocamento, medido nesse ponto P sobre um plano horizontal;
- tem o sentido das maiores altitudes.

Assim, o gradiente da altitude e' elevado em pontos tais que as curvas de nível são próximas (como o ponto A); e fraco em pontos em que as curvas de nível são afastadas (como o ponto B), e onde uma escalada seria mais fácil...

O cálculo do gradiente de uma função f das coordenadas curvilíneas α_i desenvolve-se a partir das expressões acima. Assim, usando derivadas parciais:

$$\frac{df}{dl} = \nabla f \cdot \hat{n} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{\partial \alpha_i}{\partial l} \quad (i=1,2,3)$$

Mas: $\frac{\partial \alpha_i}{\partial l} = \nabla \alpha_i \cdot \hat{n}$; donde, recorrendo à propriedade

distributiva do produto escalar relativamente à adição de vetores:

$$\frac{df}{dl} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \nabla \alpha_i \cdot \hat{n} = \hat{n} \cdot \left[\sum_i \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \nabla \alpha_i \right]$$

Assim:

$$\boxed{\nabla f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \nabla \alpha_i}$$

Para calcular $\nabla \alpha_i$, considere-se uma superfície $\alpha_i = \text{constante}$, e um vetor $\hat{z}_i$ perpendicular a essa superfície (ou seja, tangente à linha coordenada (α^i)), com o sentido de α_i crescente.

Assim, $\hat{z}_i$ e $\nabla \alpha_i$ têm o mesmo sentido.

Numa linha coordenada, o elemento

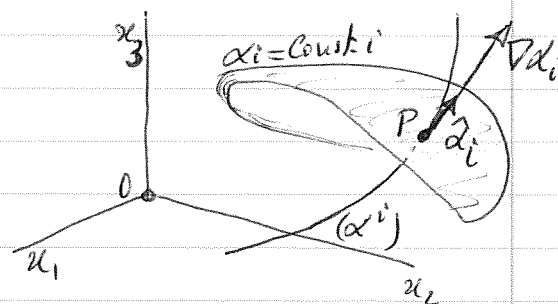
de arco escreve-se: $dl^{(i)} = \sqrt{g_{ii}} d\alpha_i$

Donde, usando a definição

$$\nabla \alpha_i = \frac{d\alpha_i}{dn}, \quad |\nabla \alpha_i| = \frac{d\alpha_i}{\sqrt{g_{ii}} d\alpha_i} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}$$

resultando em $\nabla \alpha_i = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \hat{z}_i$. Donde:

$$\boxed{\nabla f = \sum_i \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \hat{z}_i}$$



⇒ Exemplos:

- Coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3):

sendo $g_{ii} = 1$, $i=1,2,3$, resulta:

$$\nabla f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \hat{x}_i$$

- Coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z):

sendo $g_{11}=1$, $g_{22}=\rho^2$ e $g_{33}=1$, resulta:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

- Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ):

sendo $g_{11}=1$, $g_{22}=r^2$, $g_{33}=r^2 \sin^2 \theta$, resulta:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

⇒ Exemplos de cálculo:

⇒ $\nabla(r)$: Usando coordenadas cartesianas, vem:

$$\begin{aligned} \nabla(r) &= \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = \\ &= \hat{x} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot 2x \right) + \hat{y} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot 2y \right) + \hat{z} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot 2z \right) = \\ &= \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \hat{r} \end{aligned}$$

Usando coordenadas esféricas, resulta diretamente:

$$\nabla(r) = \frac{\partial(r)}{\partial r} \hat{r} = \hat{r}$$

⇒ $\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$: trata-se do gradiente relativamente às coordenadas $\vec{r}$, ou seja, considerando $\vec{r}'$ constante. Usando coordenadas

cartesianas:

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{r}} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) &= \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right) = \\ &= \hat{x} \left(-\frac{1}{2} \right) \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{-3/2} 2(x-x') + \\ &\quad + \hat{y} \left(-\frac{1}{2} \right) \left[\dots \right]^{-3/2} 2(y-y') + \hat{z} \left(-\frac{1}{2} \right) \left[\dots \right]^{-3/2} 2(z-z') = \\ &= - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \end{aligned}$$

Usando $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, vem

$$\nabla_{\vec{r}} \left(\frac{1}{R} \right) = - \frac{\hat{R}}{R^2}$$

$= \nabla_{\vec{r}'} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$: neste caso, considere $\vec{r}$ constante. Usando ainda coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{r}'} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) &= \left(\hat{x}' \frac{\partial}{\partial x'} + \hat{y}' \frac{\partial}{\partial y'} + \hat{z}' \frac{\partial}{\partial z'} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right) = \\ &= \hat{x}' \left(-\frac{1}{2} \right) [\dots]^{-3/2} (-2(x-x')) + \hat{y}' \left(-\frac{1}{2} \right) [\dots]^{-3/2} (-2(y-y')) + \\ &\quad + \hat{z}' \left(-\frac{1}{2} \right) [\dots]^{-3/2} (-2(z-z')) = \\ &= + \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \end{aligned}$$

Seu $\underline{\vec{R}} = \vec{r} - \vec{r}'$, resulta: $\boxed{\nabla_{\vec{r}'} \left(\frac{1}{R} \right) = + \frac{\hat{R}}{R^2}}$

(notar a troca de sinal relativamente ao cálculo anterior).

$= \nabla \left(\frac{1}{r} \right)$: usando ainda coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) &= \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = \\ &= \hat{x} \left[\left(-\frac{1}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} (2x) \right] + \hat{y} \left[\left(-\frac{1}{2} \right) (\dots)^{-3/2} (2y) \right] + \\ &\quad + \hat{z} \left[\left(-\frac{1}{2} \right) (\dots)^{-3/2} (2z) \right] = \\ &= -\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{\hat{r}}{r^2} \end{aligned}$$

Usando coordenadas esféricas vem de imediato:

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial (1/r)}{\partial r} \hat{r} = -\frac{1}{r^2} \hat{r}$$

B.3. Invariância do operador ∇ (nabla)

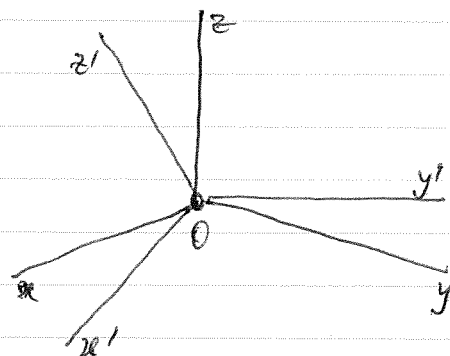
O operador ∇ exprime-se, como se viu, na forma

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

em coordenadas cartesianas ortogonais. Sejam dois sistemas de coordenadas cartesianas S e S' , com origem comum por simplicidade (o uso de origens diferentes não introduz alterações nos cálculos seguintes).

Um vetor $\vec{A}$ possui componentes nos dois sistemas, que se relacionam da seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \\ A_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$



Os coeficientes a_{ij} relacionam-se com as orientações mútuas dos eixos dos dois sistemas. Para $\vec{A} = \nabla f$, vem:

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = a_{11} \frac{\partial f}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial f}{\partial y} + a_{13} \frac{\partial f}{\partial z}$$

qualquer que seja f diferenciável; e, analogamente, para $\partial f / \partial y'$ e $\partial f / \partial z'$. Donde: $\frac{\partial}{\partial x'} = a_{11} \frac{\partial}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial}{\partial y} + a_{13} \frac{\partial}{\partial z}$

(analogamente para $\partial / \partial y'$ e $\partial / \partial z'$). As "componentes" do operador ∇ em S' relacionam-se com as "componentes" de ∇ em S tal como as componentes de um qualquer vector $\vec{A}$ entre S e S' . Assim, como qualquer vector, ∇ é um invariante:

$$[\nabla_{x'}] = [a_{ij}] [\nabla_x] \quad (i,j) = 1, 2, 3$$

B.4. Fluxo

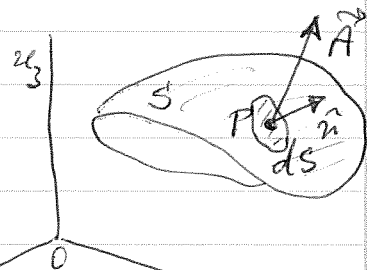
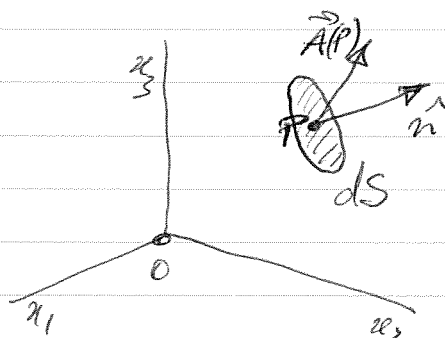
Seja $\vec{A}(P)$ uma função vectorial, e considere-se um elemento de área dS em P , com um vector normal a dS designado por $\hat{n}$, tomado no sentido em que se pretende calcular o fluxo. Define-se o fluxo elementar $d\Phi$ de $\vec{A}$ através de $d\vec{S} = dS \hat{n}$ como

$$d\Phi = \vec{A}(P) \cdot \hat{n} dS = \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Escolhendo a orientação de $d\vec{S}$ de tal modo que $\hat{n}$ seja paralelo a $\vec{A}(P)$, obtém-se o máximo valor do fluxo elementar $d\Phi$; isto segue uma lei do cosseno do ângulo $(\vec{A}(P), \hat{n})$. Se se considerar o sentido inverso de fluxo ($\hat{n} \rightarrow -\hat{n}$), o valor obtido é simétrico. O fluxo de $\vec{A}$ através de uma superfície finita S define-se como o integral do fluxo elementar $d\Phi$ sobre a superfície S :

$$\Phi = \int \vec{A} \cdot \hat{n} dS$$

Como exemplo, seja um fluido, de densidade ρ , em movimento com velocidade $\vec{v}(P)$. Sendo $d\vec{S} = \hat{n} dS$ um elemento de superfície contendo P , a massa de fluido que atravessa dS , no sentido de $\hat{n}$, por unidade de tempo, é $\rho \vec{v} \cdot \hat{n} dS$. Para uma superfície fechada S , o fluxo de $\rho \vec{v}$ é igual à taxa de variação da massa para o exterior do



volumne limitado por S (sendo $\hat{n}$ orientado para o exterior de S); um fluido incompressível, $\oint_S \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dS = 0$.

≡ Exemplos de cálculo:

• Seja $\vec{A} = (K/r^2)\hat{r}$ e S uma superfície esférica de raio R . Então: $\hat{n} = \hat{r}$, $dS = R d\theta \cdot R \sin\theta d\phi = R^2 \sin\theta d\theta d\phi$.

$$\text{Assim: } \Phi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{K}{r^2} \hat{r} \right) \cdot (\hat{r} R^2 \sin\theta d\theta d\phi) = \\ = K \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi K$$

Seja $\vec{A}$ o campo elétrico de uma carga pontual q , na origem, seria $K = q/4\pi\epsilon_0$; sendo S centrada na origem igualmente, resulta que $\epsilon_0 \Phi = q$, de acordo com a lei de Gauss.

• Seja $\vec{A} = \hat{x}z + \hat{y}x - \hat{z}3y^2$, e S a superfície fechada definida por: (a) círculo de raio 2 em $z=2$
(b) círculo de raio 2 em $z=0$
(c) superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 4$, entre $z=0$ e $z=2$.

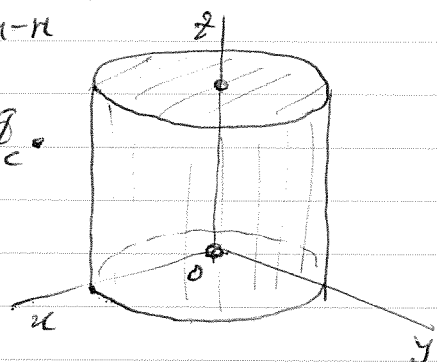
O fluxo para o exterior de S pode ser calculado como a soma de fluxos parciais através das superfícies (a), (b) e (c): $\Phi = \Phi_a + \Phi_b + \Phi_c$.

• Cálculo de Φ_a :

$$d\vec{S} = \hat{z} dS = \hat{z} dx dy \\ \vec{A} \cdot d\vec{S} = -3y^2 z dx dy, \quad z=2$$

Usando coordenadas cilíndricas:

$$z=2; \quad y = \rho \sin\phi \quad dS = \rho d\phi d\rho \\ \int_a \vec{A} \cdot d\vec{S} = -3 \times 2 \int_0^2 \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin^2\phi \cdot \rho d\phi d\rho = -6 \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \sin^2\phi d\phi = \\ = -6 \left(\frac{\rho^4}{4} \Big|_0^2 \right) \left(\int_0^{2\pi} \sin^2\phi d\phi \right) = -6(4)(\pi) = -24\pi$$



• Cálculo de Φ_b : $d\vec{S} = -\hat{z} dS$

$$\vec{A} \cdot d\vec{S} = +3y^2 z dx dy, \quad z=0$$

$$\text{Logo: } \int_b \vec{A} \cdot d\vec{S} = 0$$

• Cálculo de Φ_c : Usando coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\phi \\ y = \rho \sin\phi \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{x} = \hat{\rho} \cos\phi - \hat{\phi} \sin\phi \\ \hat{y} = \hat{\rho} \sin\phi + \hat{\phi} \cos\phi \\ \hat{z} = \hat{z} \end{cases} \quad d\vec{S} = \hat{\rho} \rho d\phi dz, \quad \rho=2$$

$$\vec{A} = (\hat{\rho} \cos \phi - \hat{\phi} \sin \phi) z + (\hat{\rho} \sin \phi + \hat{\phi} \cos \phi) (\rho \cos \phi - z) \hat{z} \quad \rho^2 \sin^2 \phi$$

$$\vec{A} \cdot d\vec{S} = \hat{\rho} (z \cos \phi + 2 \sin \phi \cos \phi) \cdot \hat{\rho} (2 d\phi dz)$$

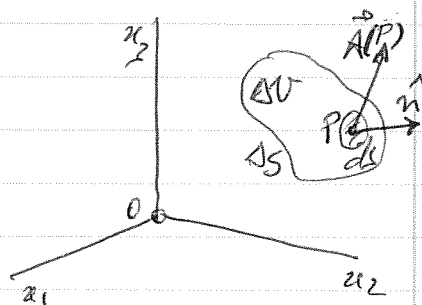
$$\begin{aligned} \Phi_6 &= 2 \int_0^2 \int_0^{2\pi} [z \cos \phi + 2 \sin \phi \cos \phi] d\phi dz = \\ &= 2 \int_0^2 z dz \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi + 4 \int_0^2 dz \int_0^{2\pi} \sin \phi \cos \phi d\phi = \\ &= 0 \end{aligned}$$

B.5. Divergência de um campo vetorial

- Definição:

Seja um campo vetorial $\vec{A}(P)$, e considere-se o fluxo $\Delta\Phi$ de $\vec{A}$ através de uma superfície ΔS que limita um pequeno volume ΔV , que contém o ponto P (fluxo calculado para o exterior de ΔS , ou seja, com o vetor $\hat{n}$ normal a ΔS dirigido para o exterior de ΔS):

$$\Delta\Phi = \oint_{\Delta S} \vec{A}(P) \cdot \hat{n} dS$$

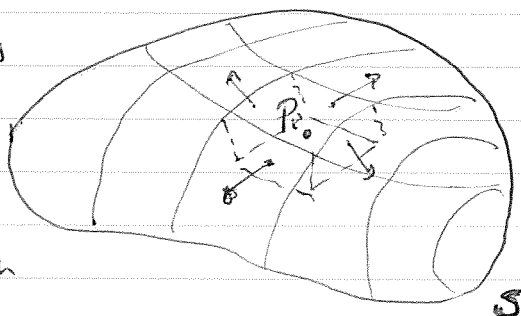


Define-se a divergência de $\vec{A}$ em P , $\nabla \cdot \vec{A}(P)$, como o limite de $\Delta\Phi/\Delta V$ quando $\Delta V \rightarrow 0$, mantendo P no interior de ΔV , e sendo esse limite independente da forma como ΔV tende para zero:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{A}(P) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta S} \vec{A}(P) \cdot \hat{n} dS}$$

- Teorema de Gauss-Green:

Seja agora uma superfície fechada S , limitando um volume V . Este volume pode ser dividido em volumes elementares ΔV_i , e a ela aplicada a relação acima estabelecida para definição de divergência. Assim, a menos de infinitesimais de ordem superior, $\Delta\Phi_i = \Delta V_i \nabla \cdot \vec{A}(P_i)$. Somando todos os fluxos dos volumes elementares ΔV_i , e dado que os fluxos através de faces comuns a elementos



Vizinhos são simétricos, obtém-se somente o fluxo total através da superfície S . Assim, no limite, resulta o fluxo Φ através de S :

$$\Phi = \oint_S \vec{A} \cdot \hat{n} dS = \int_V \nabla \cdot \vec{A} dV$$

que exprime o Teorema de Gauss-Green, ou teorema da divergência.

Exemplo: Num fluido incompressível, de densidade ρ e campo de velocidade $\vec{v}$, o fluxo de $\rho\vec{v}$ através de uma superfície fechada S arbitrária é nulo. Assim, $\nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0$ em todos os pontos. Para o movimento de fluido resultante de uma explosão, tem-se que $\nabla \cdot (\rho\vec{v}) > 0$.

- Cálculo de $\nabla \cdot \vec{A}$:

Sendo a definição de $\nabla \cdot \vec{A}$ independente da forma de ΔV , escolhe-se, por simplicidade, dos cálculos, um volume elementar contendo $P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e limitado por superfícies coordenadas $\alpha_i = \text{constante } i$,

que definem o volume ΔV . Os pontos P_i e Q_i (ver figura) são as interseções das linhas coordenadas (α_i) , que se unem em P , com as superfícies coordenadas que definem o volume ΔV . As coordenadas de P_i e Q_i são:

$$P_1(\alpha_1 + \frac{\Delta\alpha_1}{2}, \alpha_2, \alpha_3), \quad Q_1(\alpha_1 - \frac{\Delta\alpha_1}{2}, \alpha_2, \alpha_3)$$

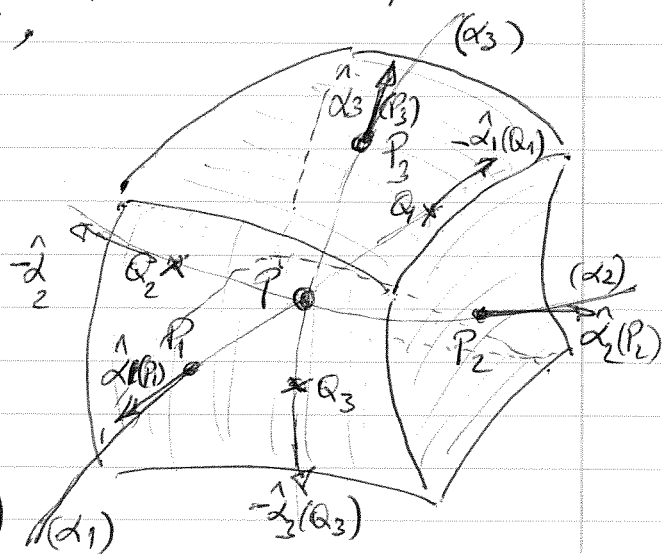
$$P_2(\alpha_1, \alpha_2 + \frac{\Delta\alpha_2}{2}, \alpha_3), \quad Q_2(\alpha_1, \alpha_2 - \frac{\Delta\alpha_2}{2}, \alpha_3)$$

$$P_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 + \frac{\Delta\alpha_3}{2}), \quad Q_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 - \frac{\Delta\alpha_3}{2})$$

O fluxo $\Delta\Phi_i$ através das duas faces opostas de ΔV situadas perpendicularmente a (α_i) e centradas em P_i e Q_i , cuja área elementar é $\Delta S^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \Delta\alpha_j \Delta\alpha_k$ ($i, j, k = 1, 2, 3$, $i \neq j \neq k$), vale:

$$\Delta\Phi_i = \left[\vec{A}(P_i) \cdot \hat{\alpha}_i \right] \Delta S^{(i)} + \left[\vec{A}(Q_i) \cdot (-\hat{\alpha}_i) \right] \Delta S^{(i)}$$

a menos de infinitésimos de ordem superior; ou seja:



$$\Delta\Phi_i = \left[A_i(P_i) \sqrt{g_{jj}(P_i)} g_{kk}(P_i) - A_i(Q_i) \sqrt{g_{jj}(Q_i)} g_{kk}(Q_i) \right] \Delta x_j \Delta x_k$$

O parêntesis recto pode ser escrito de outra forma, atendendo a que P_i e Q_i são pontos próximos:

$$\Delta\Phi_i = \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (A_i \sqrt{g_{jj}} g_{kk}) \Delta x_i \right] \Delta x_j \Delta x_k$$

Atendendo a que o volume elementar se escreve como $\Delta V = g \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$, vem: $\Delta\Phi_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_i \frac{g}{\sqrt{g_{ii}}} \right) \frac{1}{g} \Delta V$

Somando as três contribuições $\Delta\Phi_i$ ($i=1,2,3$), correspondentes aos três pares de faces opostas, resulta no limite $\Delta V \rightarrow 0$:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{A}(P) = \frac{1}{g} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{g}{\sqrt{g_{ii}}} A_i \right)}$$

Exemplos:

— Coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) ou (x, y, z) :
 $\alpha_i = x_i$; $g = g_{ii} = 1$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{A} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x_i}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

— Coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) :

$$g_{\rho\rho} = 1, \quad g_{\phi\phi} = \rho^2, \quad g_{zz} = 1, \quad g = \rho^2$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

— Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) :

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta, \quad g = r^2 \sin \theta$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}}$$

A divergência de um campo vectorial, $\nabla \cdot \vec{A}$, é invariante relativamente à mudança do sistema de coordenadas, pois quer ∇ (nabla) quer o produto escalar são invariantes na mu-

dação do sistema de coordenadas.

Exemplos de cálculo:

$$= \nabla \cdot \vec{r} : \text{em coordenadas cartesianas, } \vec{r} = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z; \\ \text{donde: } \nabla \cdot \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

$$\text{Em coordenadas esféricas: } \vec{r} = \hat{r}r + \hat{\theta}\theta + \hat{\phi}\phi; \text{ donde} \\ \nabla \cdot \vec{r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^3) + 0 + 0 = 3$$

$$= \nabla \cdot (\rho \hat{\rho}) : \text{em coordenadas cilíndricas:} \\ \nabla \cdot (\rho \hat{\rho}) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho^2)}{\partial \rho} + 0 + 0 = 2$$

Note-se que ρ é a distância do ponto $P(\rho, \phi, z)$ ao eixo zz , enquanto no cálculo anterior r é a distância do ponto $P(r, \theta, \phi)$ à origem O .

$$= \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r} \right) : \text{em coordenadas esféricas,} \\ \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{1}{r} \right) + 0 + 0 = \frac{1}{r^2}$$

$$= \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^3} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) : \text{em coordenadas esféricas, aplicando} \\ \text{a expressão acima, resulta:} \\ \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{1}{r^2} \right) + 0 + 0 = 0$$

Todavia, do teorema de Gauss-Oreen, aplicado a uma superfície esférica de raio R e respectivo volume (R arbitrário):

$$\oint_{S(R)} \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) \cdot \hat{n} ds = 4\pi$$

Existe um problema com a definição de $\hat{r}/r^2$ em $r=0$. Na realidade, como

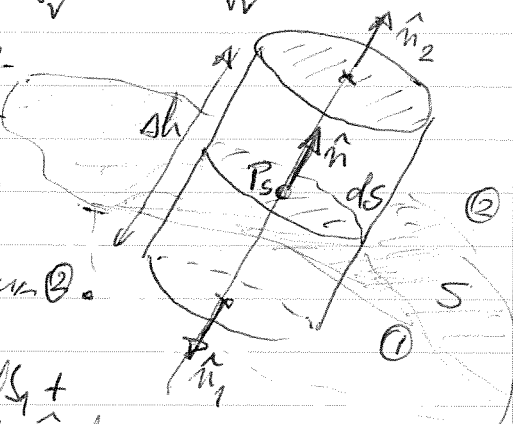
discutido em , $\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = 4\pi \delta^3(\vec{r})$, sendo $\delta^3(\vec{r})$ a distribuição δ de Dirac no espaço tridimensional. Resulta assim: $\oint_{S(R)} \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) \cdot \hat{n} ds = \int_{V(R)} \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) dv = 4\pi$.

— Divergência superficial $\nabla_S \cdot \vec{A}$:

O cálculo de $\nabla_S \cdot \vec{A}$ acima discutido implica a existência das derivadas $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} A_i \right)$. Ora o campo $\vec{A}$ pode apresentar descontinuidade em pontos de uma superfície S

(o que sucede com o campo elétrico $\vec{E}$ e o campo magnético $\vec{B}$ na superfície de interface entre dois meios com parâmetros materiais ϵ, μ, γ diferentes). Em pontos P não pertencentes à superfície S , existe $\nabla \cdot \vec{A}$, verificando-se a relação $\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = f(\vec{r})$. Então surge $\int_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \int_V f(\vec{r}) dV$.

Considere-se, agora, a situação ilustrada na figura, com o ponto P_S em S . Foi construído um cilindro elementar com eixo contendo P_S (altura Δh) e normal a S , secar dS , e bases de áreas ΔS_1 e ΔS_2 nos lados de S ; $\hat{n}$ é o vetor normal a S em P_S , orientado de ① para ②.



Aplicando o teorema de Gauss-Green:

$$\int_{\text{VOL}} \nabla \cdot \vec{A} dV = \oint_{\text{SCIL}} \vec{A} \cdot \hat{n} dS = \vec{A}_2 \cdot \hat{n}_2 dS_2 + \vec{A}_1 \cdot \hat{n}_1 dS_1 + \int_{\text{LATERAL}} \vec{A} \cdot \hat{n}_L dS_L$$

Considerando o limite $\Delta h \rightarrow 0$ (mantendo as bases em cada lado de S), o último termo anula-se; donde: $\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{\text{VOL}} \nabla \cdot \vec{A} dV = \hat{n} \cdot (\vec{A}_2 - \vec{A}_1) dS$. Tem-se ainda:

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{\text{VOL}} \nabla \cdot \vec{A} dV = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{\text{VOL}} f(\vec{r}) dV = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} f(\vec{r}_S) dS \Delta h = f_S(\vec{r}_S) dS$$

definindo a função densidade superficial $f_S(\vec{r}_S)$. Assim, no limite $\Delta h \rightarrow 0$, resulta: $\hat{n} \cdot (\vec{A}_2 - \vec{A}_1) dS = f_S dS$. Definiremos o operador divergência superficial $\nabla_S \cdot \vec{A}$ como:

$$\boxed{\nabla_S \cdot \vec{A} = \hat{n} \cdot [\vec{A}_2(\vec{r}_S) - \vec{A}_1(\vec{r}_S)]}$$

Resulta então, em pontos de S :

$$\nabla_S \cdot \vec{A} = \hat{n} \cdot [\vec{A}_2(\vec{r}_S) - \vec{A}_1(\vec{r}_S)] = f_S(\vec{r}_S)$$

correspondendo, fora da superfície S , à relação

$$\nabla \cdot \vec{A} = f(\vec{r})$$

Seja a função densidade superficial nula ($f_S(\vec{r}_S) = 0$), resulta na superfície de descontinuidade S que:

$$\hat{n} \cdot [\vec{A}_2(\vec{r}_S) - \vec{A}_1(\vec{r}_S)] = 0$$

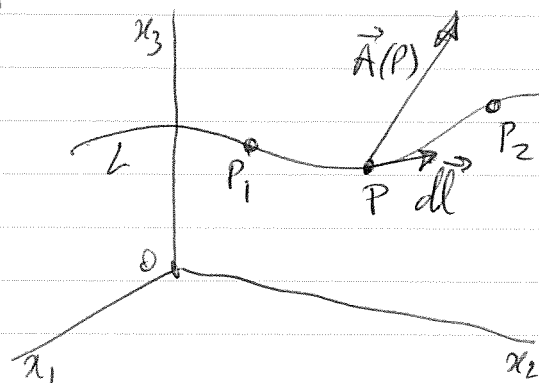
Neste caso, as componentes normais de $\vec{A}$ de um e outro lado de S são iguais: continuidade da componente normal de $\vec{A}$ através da fronteira S .

B.6. Circulação de um campo vectorial

Seja $\vec{A}(P)$ um campo vectorial, e L uma linha cujo vector elementar tangente é $d\vec{l}$, ver figura.

Define-se a circulação Γ de $\vec{A}$ ao longo da linha L , entre os pontos P_1 e P_2 , como

$$\Gamma = \int_{P_1}^{P_2} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$



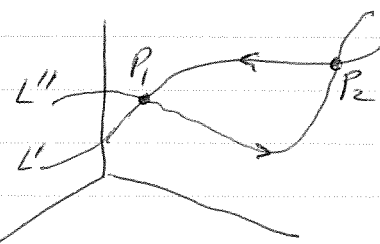
Note-se que a circulação depende do sentido do percurso entre P_1 e P_2 , definido por $d\vec{l}$.

Se $\vec{A}$ é um campo conservativo, a circulação respectiva é independente do percurso entre P_1 e P_2 . Assim, sendo a linha L fechada, resulta no caso de um campo conservativo que:

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{P_1(L')}^{P_2(L')} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_{P_2(L'')}^{P_1(L'')} \vec{A} \cdot d\vec{l} =$$

$$= \int_{P_1(L')}^{P_2(L')} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_{P_2(L'')}^{P_1(L'')} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{P_1(L')}^{P_2(L')} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_{P_2(L'')}^{P_1(L'')} \vec{A} \cdot d\vec{l}' =$$

$$= \int_{P_1(L')}^{P_2(L')} \vec{A} \cdot d\vec{l} - \int_{P_1(L'')}^{P_2(L'')} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{P_1(L')}^{P_2(L')} \vec{A} \cdot d\vec{l} - \int_{P_1(L'')}^{P_2(L'')} \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0$$



No caso em que $\vec{A}$ é uma força, a circulação de $\vec{A}$ é o trabalho mecânico W realizado no percurso L entre P_1 e P_2 . No caso de força conservativa, o trabalho é independente da forma do percurso, apenas dependendo de P_1 e P_2 . É o caso do campo gravítico (anulação da gravidade $\vec{g}$), e também do campo electrostático.

Exemplo: Determinação do trabalho executado sobre uma partícula deslocando-se na curva $y=x^2$, da origem $O(0,0)$

até ao ponto $A(1,1)$, pela força $\vec{F} = \hat{x}xy + \hat{y}y^2$:

$$W = \int_0^A \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{(0,0)}^{(1,1)} (\hat{x}xy + \hat{y}y^2) \cdot (\hat{x}dx + \hat{y}dy) = \int_{(0,0)}^{(1,1)} (xydx + y^2dy)$$

Sendo $y=x^2$, vem $dy = 2xdx$; donde:

$$W = \int_0^1 [x(x^2)dx + (x^2)^2(2xdx)] = \int_0^1 (2x^3 + 2x^5)dx = \left[\frac{2x^4}{4} + \frac{2x^6}{6} \right]_0^1 = \frac{7}{12}$$

Sendo usada a representação paramétrica da curva $y=x^2$,

$$\begin{aligned} \begin{cases} x=s \\ y=s^2 \end{cases} \text{ , vem: } W &= \int_{(0,0)}^{(1,1)} (xydx + y^2dy) = \\ &= \int_0^1 (t \cdot t^2 dt + (t^2)^2 (2t dt)) = \\ &= \int_0^1 (t^3 + 2t^5) dt = 7/12 \end{aligned}$$

B.7. Rotacional de um campo vectorial

- Definição:

Seja um campo vectorial $\vec{A}(P)$, e ΔC um percurso fechado elementar, em que se "apoia" uma superfície elementar ΔS , em torno do ponto P e conforme indica a figura. Seja $\hat{n}$ o vetor normal a ΔS , definido com um sentido concordante com o da circulação ao longo de ΔC (este definido pelo sentido de $d\vec{l}$), segundo a "regra do parafuso direito". Define-se a componente segundo $\hat{n}$ do rotacional de $\vec{A}$ em P como:

$$\left[(\nabla \times \vec{A}(P)) \cdot \hat{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Delta C} \vec{A} \cdot d\vec{l} \right]$$

sendo esse limite independente da forma da superfície ΔS e do modo como ΔS tende para zero. O vector $\nabla \times \vec{A}$ tem uma grandeza que é a máxima circulação de $\vec{A}$ por unidade de área, estando orientado na direcção e sentido em que tal máximo ocorre.

Um campo vectorial $\vec{A}(P)$ cujo rotacional é nulo diz-se irrotacional ou lamelar.

- Teorema de Stokes ou do rotacional:

Seja uma superfície S apoiada num percurso C fechado, conforme mostra a figura. Esta superfície pode ser dividida em áreas elementares ΔS_i , e a cada uma delas pode ser aplicada

a definição acima. Assim, a menos de infinitesimos de ordem superior,

$$\Delta \Gamma_i = (\nabla \times \vec{A} \cdot \hat{n})_i \Delta S_i$$

Adicionando todas as circulações $\Delta \Gamma_i$ nos percursos elementares ΔC_i associados às áreas ΔS_i , e dado que as circulações em lados comuns a percursos vizinhos são simétricas, obtém-se somente a circulação total no percurso C . Assim, no limite:

$$\Gamma = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot \hat{n} dS$$

que traduz o teorema de Stokes. O resultado é independente da superfície S específica, desde que apoiada no percurso C , conforme se mostra facilmente. Sejam S_1 e S_2 duas superfícies apoiadas em C , cujos vetores normais $\hat{n}_1$ e $\hat{n}_2$ têm sentidos de acordo com o sentido de circulação em C . Considerando a superfície fechada S composta de S_1 e S_2 :

$$\begin{aligned} \oint_S \nabla \times \vec{A} \cdot \hat{n} dS &= - \int_{S_1} \nabla \times \vec{A} \cdot \hat{n}_1 dS_1 + \int_{S_2} \nabla \times \vec{A} \cdot \hat{n}_2 dS_2 = \\ &= \int_V \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) dV \end{aligned}$$

quando o teorema de Gauss-Green, sendo V o volume definido por $S = S_1 + S_2$. Como $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$, conforme adiante demonstrado, vem imediatamente que

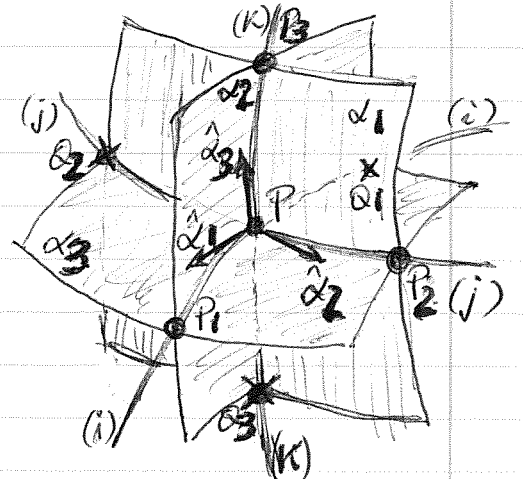
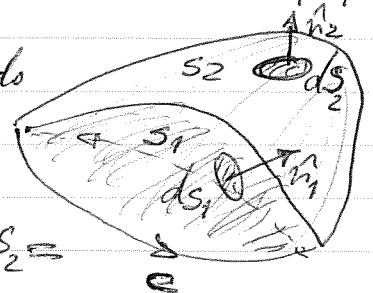
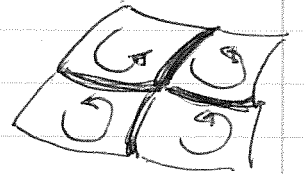
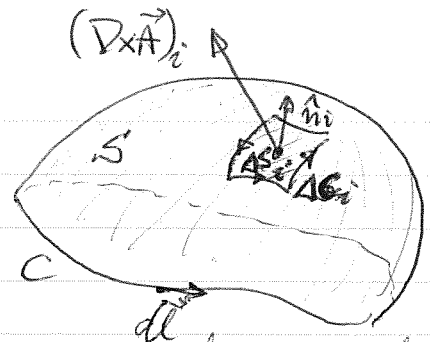
$$\int_{S_1} \nabla \times \vec{A} \cdot \hat{n}_1 dS_1 = \int_{S_2} \nabla \times \vec{A} \cdot \hat{n}_2 dS_2$$

para quaisquer S_1 e S_2 apoiadas em C .

— Cálculo de $\nabla \times \vec{A}$:

Seja um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, e a superfície coordenada $\alpha_i = \text{constante } i$ contendo o ponto $P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Nessa superfície, constrói-se um elemento de área com lados paralelos às linhas coordenadas $(j), (k)$ que se intersectam em P .

Definem-se os seguintes pontos vizinhos de P e situados nas linhas coordenadas $(i), (j), (k)$:



$$P_1 \left(\alpha_1 + \frac{\Delta \alpha_1}{2}, \alpha_2, \alpha_3 \right)$$

$$Q_1 \left(\alpha_1 - \frac{\Delta \alpha_1}{2}, \alpha_2, \alpha_3 \right)$$

$$P_2 \left(\alpha_1, \alpha_2 + \frac{\Delta \alpha_2}{2}, \alpha_3 \right)$$

$$Q_2 \left(\alpha_1, \alpha_2 - \frac{\Delta \alpha_2}{2}, \alpha_3 \right)$$

$$P_3 \left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 + \frac{\Delta \alpha_3}{2} \right)$$

$$Q_3 \left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 - \frac{\Delta \alpha_3}{2} \right)$$

Calcula-se as circulações $\Delta \Gamma_i$ de $\vec{A}$ ao longo dos percursos ΔC_i nas superfícies $\alpha_i = \text{constante}$: $\Delta \Gamma_i = \oint_{\Delta C_i} \vec{A} \cdot d\vec{l}$.

O elemento de linha $d\vec{l}$ correspondente ao lado que inclui o ponto P_2 é $(0, 0, \sqrt{g_{33}(P_2)} \Delta \alpha_3)$ e a circulação $\vec{A} \cdot d\vec{l}$ neste elemento vale, portanto, $A_3(P_2) \sqrt{g_{33}(P_2)} \Delta \alpha_3$. Para o elemento de linha oposto, contendo Q_2 , a circulação vale $-A_3(Q_2) \sqrt{g_{33}(Q_2)} \Delta \alpha_3$. Considerando, analogamente, os outros lados de ΔC_1 (contendo P_3 e Q_3), a circulação total $\Delta \Gamma_1$ em ΔC_1 vale, a menos de termos de ordem superior:

$$\Delta \Gamma_1 = \left[A_3(P_2) \sqrt{g_{33}(P_2)} - A_3(Q_2) \sqrt{g_{33}(Q_2)} \right] \Delta \alpha_3 - \left[A_2(P_3) \sqrt{g_{22}(P_3)} - A_2(Q_3) \sqrt{g_{22}(Q_3)} \right] \Delta \alpha_2$$

No limite:

$$\Delta \Gamma_1 = \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[A_3 \sqrt{g_{33}} \right] \Delta \alpha_2 \Delta \alpha_3 - \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left[A_2 \sqrt{g_{22}} \right] \Delta \alpha_2 \Delta \alpha_3$$

A componente segundo (1) de $\nabla \times \vec{A}$ obtém-se de $\Delta \Gamma_1$ dividindo por $\Delta S_1 = \sqrt{g_{22} g_{33}} \Delta \alpha_2 \Delta \alpha_3$, no limite $\Delta S_1 \rightarrow 0$:

$$(\nabla \times \vec{A})_1 = \frac{\sqrt{g_{11}}}{g} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_3 \sqrt{g_{33}}) - \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (A_2 \sqrt{g_{22}}) \right]$$

Por permutação circular dos índices, obtém-se as outras componentes de $\nabla \times \vec{A}$, desenvolvendo o seguinte determinante pela primeira linha:

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{g} \begin{vmatrix} \sqrt{g_{11}} \hat{\alpha}_1 & \sqrt{g_{22}} \hat{\alpha}_2 & \sqrt{g_{33}} \hat{\alpha}_3 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \\ \sqrt{g_{11}} A_1 & \sqrt{g_{22}} A_2 & \sqrt{g_{33}} A_3 \end{vmatrix}$$

= Exemplos:

Coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3):

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

Resulta:

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial u_2} - \frac{\partial A_2}{\partial u_3} \right) \hat{u}_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial u_3} - \frac{\partial A_3}{\partial u_1} \right) \hat{u}_2 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial u_1} - \frac{\partial A_1}{\partial u_2} \right) \hat{u}_3$$

Verifique-se, agora, que o valor de $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A})$ é nulo, como atrás afirmado: $\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = \frac{\partial}{\partial u_1} (\nabla \times \vec{A})_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} (\nabla \times \vec{A})_2 + \frac{\partial}{\partial u_3} (\nabla \times \vec{A})_3 =$

$$= \left(\frac{\partial^2 A_3}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial u_1 \partial u_3} \right) + \left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial u_2 \partial u_3} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial u_2 \partial u_1} \right) + \left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial u_3 \partial u_1} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial u_3 \partial u_2} \right) = 0$$

sendo as segundas derivadas contínuas (o seu valor não depende da ordem de derivação).

Coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) :

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{\rho^2} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & A_\phi & A_z \end{vmatrix},$$

donde:

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial (\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \hat{z}$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) :

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r \hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix}, \text{ donde}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}$$

— Invariância de $\nabla \times \vec{A}$:

sendo ∇ e o produto vectorial invariantes numa mudança de sistema de coordenadas, resulta que o rotacional $(\nabla \times \vec{A})$ é invariante. Note-se que, de um modo geral, $\nabla \times \vec{A}$ não é normal a $\vec{A}$. Verifica-se sempre que $\nabla \times (\nabla f) \equiv 0$. Assim, um campo $\vec{A}$ que seja o gradiente de um dado campo escalar f (i.e., $\vec{A} = \nabla f$) será conservativo, pois

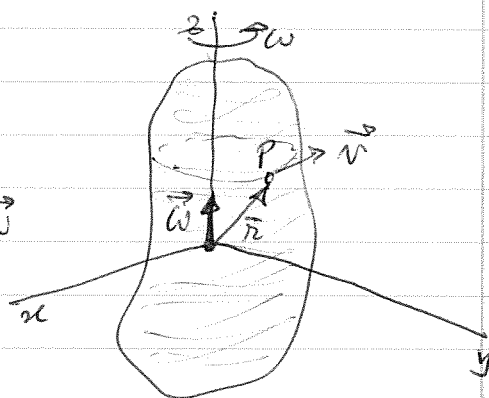
$$\oint_C \nabla \times \vec{A} \cdot \hat{n} dS = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_C \nabla f \cdot d\vec{l} = 0.$$

— Exemplo: Considerando o movimento de rotação de um sólido indeformável em torno de um eixo fixo, com velocidade angular $\vec{\omega}$, a velocidade de qualquer ponto P é dada por $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Sendo $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$, $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, resulta:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \hat{x} + \omega x \hat{y}$$

Onde:

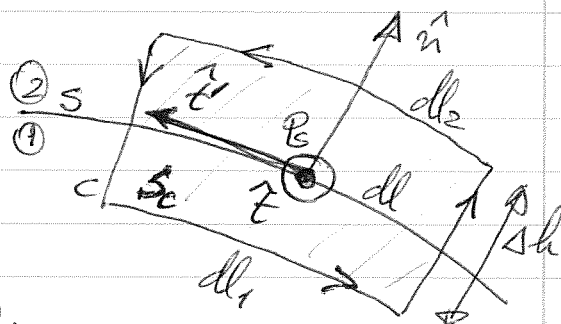
$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega \hat{z} = 2\vec{\omega}$$



— Rotacional superficial $\nabla_S \times \vec{A}$:

O cálculo de $\nabla \times \vec{A}$ acima discutido implica a existência de derivadas $\partial/\partial x_j$. Considere-se, agora, a situação em que o campo vectorial $\vec{A}$ apresenta descontinuidade numa superfície S .

Considere-se um ponto $P_S(\vec{r}_S)$ nessa superfície S , e construa-se um "retângulo elementar" C com dois lados normais a S , dois lados (dl_1, dl_2) paralelos a S em cada lado de S , e com altura Δh (ver figura).



O vetor normal a S em P_S é $\hat{n}$; defina-se um sentido de circulação em C de acordo com o vetor $\hat{t}$ normal ao retângulo ("regra do parafuso direito"). Ao percorrer o retângulo C corresponde a área elementar S_C . Definem-se ainda os vetores $\hat{t}'_1, \hat{t}'_2$ e $\hat{t}'$, estando $\hat{t}'_1$ e $\hat{t}'_2$ orientados segundo os lados dl_1 e dl_2 , e $\hat{t}'$ segundo dl (ver figura).

Admite-se que em pontos não pertencentes à superfície se pode escrever $\nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = \vec{a}(\vec{r})$. Então seg. (t. Stokes):

$$\int_S \nabla \times \vec{A} \cdot \hat{n} dS = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{A} \cdot \hat{t} dl, \text{ sendo } C \text{ uma linha fechada em } S \text{ e } S \text{ qualquer superfície apoiada em } C.$$

Considerando a situação representada na figura acima:

$$\int_{S_C} \nabla \times \vec{A} \cdot \hat{t} dS_C = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \vec{A}_2 \cdot \hat{t}'_2 dl_2 + \vec{A}_1 \cdot \hat{t}'_1 dl_1 + \int_{C_{lateral}} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Considerando o limite $\Delta h \rightarrow 0$ (mantendo dl_1 e dl_2 em lados opostos de S), o último termo anula-se; donde:

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{S_c} \nabla \times \vec{A} \cdot \hat{t} dS_c = (\vec{A}_2(\vec{r}_s) - \vec{A}_1(\vec{r}_s)) \cdot \hat{t}' dl$$

Tem-se ainda que: $\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{S_c} \nabla \times \vec{A} \cdot \hat{t} dS_c = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{S_c} \vec{a} \cdot \hat{t} dS =$
 $= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} [\vec{a}(\vec{r}_s) \cdot \hat{t} dl \Delta h] = \vec{a}_s(\vec{r}_s) \cdot \hat{t} dl$

definindo a função densidade superficial $\vec{a}_s(\vec{r}_s)$. Assim, no limite $\Delta h \rightarrow 0$, resulta:

$$[\vec{A}_2(\vec{r}_s) - \vec{A}_1(\vec{r}_s)] \cdot \hat{t}'(\vec{r}_s) dl = \vec{a}_s(\vec{r}_s) \cdot \hat{t}(\vec{r}_s) dl,$$

donde:

$$[\vec{A}_2(\vec{r}_s) - \vec{A}_1(\vec{r}_s)] \cdot \hat{t}'(\vec{r}_s) = \vec{a}_s(\vec{r}_s) \cdot \hat{t}(\vec{r}_s)$$

Ora um vetor $\vec{A}_2(\vec{r}_s) - \vec{A}_1(\vec{r}_s)$ tem, em geral, componentes quer segundo $\hat{n}(\vec{r}_s)$, quer segundo $\hat{t}'$ (no plano tangente à superfície S em $P_s(\vec{r}_s)$):

$$(\vec{A}_2 - \vec{A}_1)_n \text{ e } (\vec{A}_2 - \vec{A}_1)_{t'}$$

No ponto $P_s(\vec{r}_s)$ tem-se que

$$\hat{n}(\vec{r}_s) \times [\vec{A}_2(\vec{r}_s) - \vec{A}_1(\vec{r}_s)] =$$

$$= \hat{n} \times [\vec{A}_2 - \vec{A}_1]_n + \hat{n} \times [\vec{A}_2 - \vec{A}_1]_{t'} =$$

$$= \hat{n} \times [\vec{A}_2 - \vec{A}_1]_{t'} = \hat{n} \times [(\vec{A}_2 - \vec{A}_1) \cdot \hat{t}'] \hat{t}'$$

O vetor $\hat{n} \times (\vec{A}_2 - \vec{A}_1)_{t'}$ situa-se no plano tangente a S em $P_s(\vec{r}_s)$, sendo normal a $(\vec{A}_2 - \vec{A}_1)_{t'}$, e resultando da rotação de $(\vec{A}_2 - \vec{A}_1)_{t'}$ em torno de $\hat{n}$, segundo um ângulo de $\pi/2$ e no sentido definido pela "regra do parafuso direito", conforme mostra a figura.

Assim, conclui-se que: $\hat{n} \times [(\vec{A}_2 - \vec{A}_1) \cdot \hat{t}'] \cdot \hat{t} =$

$$= [\hat{n} \times (\vec{A}_2 - \vec{A}_1)] \cdot \hat{t} = \vec{a}_s \cdot \hat{t}$$

Donde: $\hat{n} \times (\vec{A}_2 - \vec{A}_1) = \vec{a}_s$

Define-se o operador rotacional superficial $\nabla_s \times \vec{A}$ como

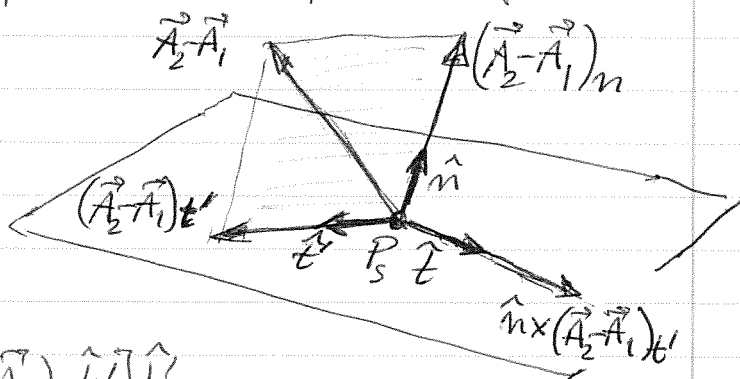
$$\boxed{\nabla_s \times \vec{A}(\vec{r}_s) = \hat{n}(\vec{r}_s) \times [\vec{A}_2(\vec{r}_s) - \vec{A}_1(\vec{r}_s)]}$$

Resulta, então, em pontos da superfície S , que

$$\nabla_s \times \vec{A}(\vec{r}_s) = \vec{a}_s(\vec{r}_s)$$

correspondendo, fora da superfície de descontinuidade S , à relação $\nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = \vec{a}(\vec{r})$.

Se a densidade superficial nula ($\vec{a}_s(\vec{r}_s) = 0$), resulta



na superfície de descontinuidade S que

$$\hat{n}(\vec{r}_s) \times [\vec{A}_2(\vec{r}_s) - \vec{A}_1(\vec{r}_s)] = 0$$

Neste caso, as componentes tangenciais de $\vec{A}$, de um e outro lado de S , são iguais: continuidade da componente tangencial de $\vec{A}$ através da fronteira S .

Bo 80 Laplaciano de um campo escalar e laplaciano de um campo vectorial

Define-se laplaciano de um campo escalar $f(P) = f(\vec{r})$ como

$$\boxed{\nabla^2 f(\vec{r}) = \nabla \cdot \nabla f(\vec{r})}$$

É frequente o laplaciano ∇^2 ser também representado por Δ .

Como $(\nabla f)_i = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial f}{\partial x_i}$ e $\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{g} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{g}{\sqrt{g_{ii}}} A_i \right)$,

resulta:

$$\boxed{\nabla^2 f = \frac{1}{g} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{g}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)}$$

Exemplos:

= Coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) :

$$\boxed{\nabla^2 f = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}} \quad \text{ou seja: } \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

= Coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) :

$$\boxed{\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

= Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) :

$$\boxed{\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}}$$

No caso de um campo vectorial $\vec{A}(P) = \vec{A}(\vec{r})$, define-se o laplaciano de $\vec{A}$ como

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r})) - \nabla \times (\nabla \times \vec{A}(\vec{r}))}$$

= Coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) :

É imediata verificar que

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} = \sum_i \nabla^2 A_i \hat{x}_i} \quad \text{ou} \quad \nabla^2 \vec{A} = \hat{x} \nabla^2 A_x + \hat{y} \nabla^2 A_y + \hat{z} \nabla^2 A_z$$

$$\text{Assim: } \nabla^2 \vec{A}(x_1, x_2, x_3) = \hat{x}_1 \left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_3^2} \right) + \hat{x}_2 \left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial x_3^2} \right) + \hat{x}_3 \left(\frac{\partial^2 A_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial x_3^2} \right)$$

= Coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) e coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) :

$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r})$ deve ser calculado pela definição acima, ou seja,

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r})) - \nabla \times (\nabla \times \vec{A}(\vec{r}))$$

usando as formas adequadas dos operadores no respectivo sistema de coordenadas. Notar que o resultado não é análogo ao obtido em coordenadas cartesianas:

$$\left[\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A}(\rho, \phi, z) &\neq \hat{\rho} \frac{\partial^2 A_\rho}{\partial \rho^2} + \hat{\phi} \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial \phi^2} + \hat{z} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \\ \nabla^2 \vec{A}(r, \theta, \phi) &\neq \hat{r} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \hat{\theta} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial \theta^2} + \hat{\phi} \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial \phi^2} \end{aligned} \right]$$

Contudo, em casos de grande simetria, resulta expressões simples para $\nabla^2 \vec{A}$.

= Coordenadas cilíndricas, $\vec{A} = A(\rho) \hat{\rho}$:

$$\text{Neste caso: } \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho A)$$

$$\text{donde: } \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = \hat{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho A) \right] = \hat{\rho} \left[-\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} (\rho A) + \frac{1}{\rho} \frac{d^2}{d\rho^2} (\rho A) \right]$$

Como: $\nabla \times \vec{A} = 0$, vem $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = 0$. Assim:

$$\nabla^2 [A(\rho) \hat{\rho}] = \frac{1}{\rho} \left[-\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho A(\rho)) + \frac{d^2}{d\rho^2} (\rho A(\rho)) \right] \hat{\rho}$$

= Coordenadas esféricas, $\vec{A} = A(r) \hat{r}$:

$$\text{Neste caso: } \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 A_r)$$

$$\text{donde: } \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = \hat{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 A_r) \right]$$

sendo $\nabla \times \vec{A} = 0$, vem $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = 0$. Assim:

$$\nabla^2 [A(r) \hat{r}] = \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 A(r)) \right] \hat{r}$$

B.9. Teorema de Helmholtz

Um campo vectorial $\vec{F}(\vec{r})$ é especificado, num domínio fechado V limitado por uma superfície S , pela sua divergência e pelo seu rotacional,

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \sigma(\vec{r}) \\ \nabla \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{j}(\vec{r}) \end{cases}$$

sendo então $\vec{F}(\vec{r})$ obtido como

$$\vec{F} = -\nabla\phi + \nabla \times \vec{A}$$

com: $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\sigma(\vec{r}')}{R} dv'$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} dv', \quad \text{sendo } R = |\vec{r} - \vec{r}'| \text{ (e } \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}') \text{)}$$

E, inversamente, um campo vectorial $\vec{F}(\vec{r})$ pode sempre decompor-se na soma de um campo vectorial irrotacional $(-\nabla\phi)$ com um campo vectorial solenoidal $(\nabla \times \vec{A})$.

Usando as propriedades da distribuição δ de Dirac, vem:

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) &= \int_V \vec{F}(\vec{r}') \delta(\vec{R}) dv' = \int_V \vec{F}(\vec{r}') \left[-\frac{1}{4\pi} \nabla_{\vec{r}}^2 \left(\frac{1}{R} \right) \right] dv' = \\ &= -\nabla_{\vec{r}}^2 \left[\int_V \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{4\pi R} dv' \right] \end{aligned}$$

Recorrendo à identidade: $\nabla \times \nabla \times \vec{a} = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$, vem:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \nabla_{\vec{r}} \times \left[\nabla_{\vec{r}} \times \left[\int_V \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{4\pi R} dv' \right] \right] = \nabla_{\vec{r}} \left[\nabla_{\vec{r}} \cdot \left[\int_V \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{4\pi R} dv' \right] \right] =$$

$$= -\nabla_{\vec{r}} \phi + \nabla_{\vec{r}} \times \vec{A},$$

sendo:

$$\phi = \nabla_{\vec{r}} \cdot \int_V \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{4\pi R} dv' \quad ; \quad \vec{A} = \nabla_{\vec{r}} \times \int_V \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{4\pi R} dv'$$

Análise-se, agora, a expressão de ϕ ; sendo

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{\vec{F}(\vec{r}')}{R} \right) &= \vec{F}(\vec{r}') \cdot \nabla_{\vec{r}} \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{1}{R} (\nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{F}(\vec{r}')) = \\ &= \vec{F}(\vec{r}') \cdot \nabla_{\vec{r}} \left(\frac{1}{R} \right) \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{4\pi} \int_V \vec{F}(\vec{r}') \cdot \nabla_{\vec{r}} \left(\frac{1}{R} \right) dv' = -\frac{1}{4\pi} \int_V \vec{F}(\vec{r}') \cdot \nabla_{\vec{r}'} \left(\frac{1}{R} \right) dv' = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_V \left[\nabla_{\vec{r}'} \cdot \left(\frac{\vec{F}(\vec{r}')}{R} \right) - \frac{1}{R} (\nabla_{\vec{r}'} \cdot \vec{F}(\vec{r}')) \right] dv' = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{F}(\vec{r}') \cdot \hat{n} ds}{R} + \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla_{\vec{r}'} \cdot \vec{F}(\vec{r}')}{R} dv' \end{aligned}$$

(em que se usa o teorema de Gauss-Green). Admitindo que as fontes $\sigma(\vec{r}')$ se encontram todas numa região finita, pode fazer-se S tão grande que $\vec{F}(\vec{r}')$ em S se torna arbitrariamente pequeno, e o primeiro integral anula-se. Assim, fazendo $\sigma(\vec{r}') = \nabla_{\vec{r}'} \cdot \vec{F}(\vec{r}')$, vem:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\sigma(\vec{r}')}{R} d\tau$$

Quanto ao valor de $\vec{A}$, vem:

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int_V \nabla_{\vec{r}} \times \left(\frac{\vec{F}(\vec{r}')}{R} \right) d\tau = \frac{1}{4\pi} \int_V \left[\nabla_{\vec{r}} \left(\frac{1}{R} \right) \times \vec{F}(\vec{r}') + \frac{1}{R} (\nabla_{\vec{r}} \times \vec{F}(\vec{r}')) \right] d\tau$$

Como:

$\nabla_{\vec{r}} \left(\frac{1}{R} \right) = -\nabla_{\vec{r}'} \left(\frac{1}{R} \right)$, e o segundo termo do integrando é nulo, vem:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{1}{4\pi} \int_V \left[\vec{F}(\vec{r}') \times \nabla_{\vec{r}'} \left(\frac{1}{R} \right) \right] d\tau = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_V \left[\frac{\nabla_{\vec{r}'} \times \vec{F}(\vec{r}')}{R} - \nabla_{\vec{r}'} \times \left(\frac{\vec{F}(\vec{r}')}{R} \right) \right] d\tau \end{aligned}$$

Do primeiro termo do integrando resulta, fazendo $\vec{j}(\vec{r}') = \nabla_{\vec{r}'} \times \vec{F}(\vec{r}')$,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} d\tau$$

Do segundo termo do integrando vem uma contribuição nula, como se mostra. Para tal, recorre-se à identidade (sendo $\vec{c}$ um vector constante): $\nabla_0 (\vec{c} \times \vec{F}) = \vec{F} \cdot \nabla \times \vec{c} - \vec{c} \cdot \nabla \times \vec{F} = -\vec{c} \cdot \nabla \times \vec{F}$. Daqui vem, usando o teorema de Gauss:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla_0 (\vec{c} \times \vec{F}) d\tau &= -\vec{c} \cdot \int_V \nabla \times \vec{F} d\tau = \\ &= \oint_S (\vec{c} \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dS = \oint_S (\vec{F} \times \hat{n} dS) \cdot \vec{c} = \\ &= \vec{c} \cdot \oint_S \vec{F} \times \hat{n} dS \end{aligned}$$

Assim:

$$\int_V \nabla \times \vec{F} d\tau = - \oint_S \vec{F} \times \hat{n} dS$$

Aplicando este resultado ao cálculo do segundo termo da contribuição de $\vec{A}$, vem:

$$-\frac{1}{4\pi} \int_V \nabla_{\vec{r}'} \times \left(\frac{\vec{F}(\vec{r}')}{R} \right) d\tau = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{R} \times \hat{n} dS$$

Admitindo que todas as fontes $\vec{j}(\vec{r}')$ se situam numa

região finita, fazendo S tão grande que a contribuição de $\vec{F}(\vec{r}')$ sobre S se torna desprezível, este integral anula-se.

B.10. Expressão de $(\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B}$:

Ocorre, em certos cálculos, a expressão $(\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B}$, que se escreve em coordenadas cartesianas (x, y, z) :

$$\begin{aligned} (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} &= \left(A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}) = \\ &= \hat{x} \left(A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) + \\ &\quad + \hat{y} \left(A_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + \\ &\quad + \hat{z} \left(A_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$