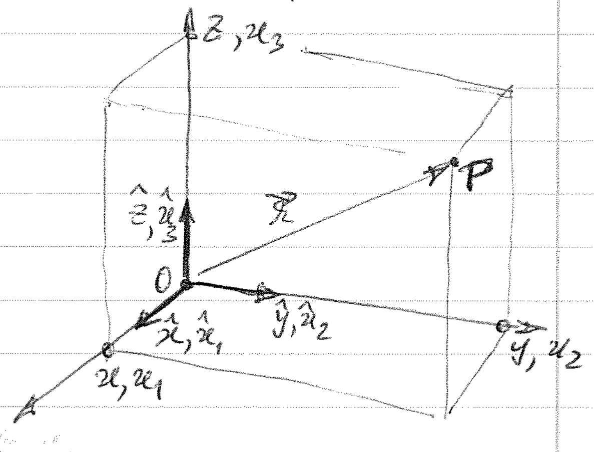
A. Sistemas de Coordenadas

A.1. Coordenadas cartesianas ortonormadas

Em muitas situações, o uso de coordenadas cartesianas ortonormadas é adequado, atendendo à natureza das simetrias do problema físico em causa. Em coordenadas cartesianas ortonormadas, usa-se um referencial que se designa por $(O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, ou $(O, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$, com vectores de base tais que $\hat{x}_i \cdot \hat{x}_j = \delta_{ij}$, em que δ_{ij} é o símbolo de Kronecker. Um ponto P é definido por um vector de posição $\vec{r}$ relativamente à origem O, com componentes (x, y, z), ou (x_1, x_2, x_3):

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} =$$
$$= x_1\hat{x}_1 + x_2\hat{x}_2 + x_3\hat{x}_3$$



A grandeza de $\vec{r}$ é $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} = |\vec{r}|$; o vector inverso de $\vec{r}$ é $-\vec{r}$, com componentes $(-x, -y, -z) = (-x_1, -x_2, -x_3)$.

Definem-se as operações seguintes sobre vectores:

Soma: $\vec{a} + \vec{b} = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$

Produto Escalar: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Produto Vectorial: $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})\, \hat{n}_{ab}$, sendo $\hat{n}_{ab}$ o versor normal ao plano definido por $(\vec{a}, \vec{b})$, com sentido definido pela rotação de $\vec{a}$ para $\vec{b}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{x}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\hat{x}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\hat{x}_3$$

Prova-se que os resultados destas operações são invariantes, independentes da escolha do sistema de coordenadas cartesianas ortonormadas.

A.2. Transformação de coordenadas

Numa transformação de coordenadas linear $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x'_1, x'_2, x'_3)$, a relação entre essas coordenadas é expressa por um sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \quad , \text{ ou } \quad \boxed{x'_i = \sum_j a_{ij} x_j} \; i,j = 1,2,3$$

Numa transformação linear ortogonal mantem-se invariante a grandeza dos vectores:

$$\sum_i (x'_i)^2 = \sum_j (x_j)^2 \quad ; i,j = 1,2,3$$

Sendo $(x'_i)^2 = \sum_j \sum_k a_{ij} a_{ik} x_j x_k \quad ; i,j,k = 1,2,3$

vem:

$$\sum_i (x'_i)^2 = \sum_{i,j,k} a_{ij} a_{ik} x_j x_k$$

Para se verificar a condição de invariância, deverá ser

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

Em notação compacta, a transformação linear escreve-se

$$\boxed{[X'] = [A][X]}$$

sendo $[X']$ e $[X]$ vectores ou matrizes coluna (3 elementos) e $[A]$ uma matriz quadrada (3×3 elementos).

A transformação de coordenadas inversa, sendo escrita como

$$x_j = \sum_i b_{ji} x'_i$$

resulta em

$$x_j = \sum_{ik} b_{ji} a_{ik} x_k$$

verificando-se, portanto, que

$$\boxed{\sum_i b_{ji} a_{ik} = \delta_{jk}}$$

Sendo $[A]$ uma transformação linear ortogonal, $\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}$, como se viu acima; resulta imediatamente que os elementos da matriz da transformação inversa valem

$$\boxed{b_{ji} = a_{ij}}$$

ou seja, $[B]$ é a transposta de $[A]$: $[B]=[A]^{-1}=[\tilde{A}]$

A.3. Transformação de vectores

Definindo um vector no espaço 3D como um terno ordenado de componentes que se transformam, numa transformação ortogonal, como as componentes de um vector de posição, então o vector $\vec{u}$ transforma-se em $\vec{u}'$ como

$$[\vec{u}'] = [A][\vec{u}]$$

A grandeza de um vector $\vec{u}$, $(\vec{u}\cdot\vec{u})^{1/2}$, e o produto escalar de dois vectores, $\vec{u}\cdot\vec{v}$, são invariantes numa transformação ortogonal.

A.4. Transformação de tensores de 2ª ordem

Seja o tensor $[\overline{\overline{T}}]$ de segunda ordem, cujos elementos são T_{ij} $(i,j=1,2,3)$. Este tensor permite relacionar linearmente dois vectores, $\vec{u}$ e $\vec{v}$: $[\vec{v}]=[\overline{\overline{T}}][\vec{u}]$.
Efectuando uma transformação $[A]$ sobre os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então será possível escrever, no sistema de coordenadas final, $[\vec{v}'] = [\overline{\overline{T}}'][\vec{u}']$
Então:

$$v_i' = \sum_j a_{ij} v_j = \sum_{j,k} a_{ij}(T_{jk} u_k) =$$

$$= \sum_{j,k,l} a_{ij} T_{jk} (\tilde{a}_{kl} u_l') = \sum_l \left(\sum_{j,k} a_{ij} T_{jk} \tilde{a}_{kl}\right) u_l'$$

(sendo $\tilde{a}_{kl} = a_{lk}$). Então, comparando com $v_i' = \sum_l T_{il}' u_l'$ resulta imediatamente a lei de transformação ortogonal de um tensor de 2ª ordem:

$$\boxed{T_{il}' = \sum_{jk} a_{ij} T_{jk} \tilde{a}_{kl}}$$

Em notação matricial:

$$\boxed{[\overline{\overline{T}}'] = [A][\overline{\overline{T}}][A]^{-1}}$$

ou

$$[\overline{\overline{T}}'] = [A][\overline{\overline{T}}][\tilde{A}]$$

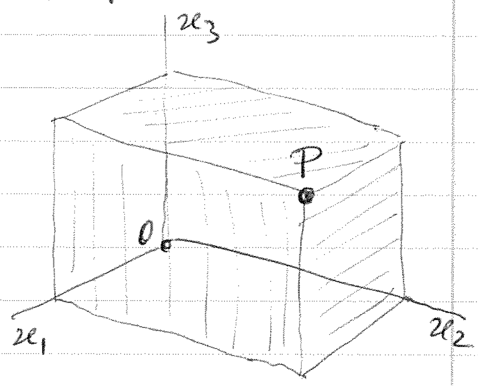
A.5. Coordenadas curvilíneas. Superfícies coordenadas.

Em certos problemas, é conveniente utilizar-se outros sistemas de coordenadas, em particular coordenadas ortonormadas, de acordo com simetrias específicas do problema em análise. Em situações comuns, por exemplo, é vantajoso recorrer a coordenadas cilíndricas ou esféricas.

Sejam
$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_1(x_1, x_2, x_3) = \text{constante } 1 \\ \alpha_2 = \alpha_2(x_1, x_2, x_3) = \text{constante } 2 \\ \alpha_3 = \alpha_3(x_1, x_2, x_3) = \text{constante } 3 \end{cases}$$
três superfícies ortogonais mutuamente (superfícies coordenadas), cuja intersecção é o ponto P de coordenadas curvilíneas $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, ou concisamente $\alpha_i(x_j)$.

Em coordenadas cartesianas, as superfícies coordenadas são planos paralelos aos planos coordenados Ox_1x_2, Ox_2x_3, Ox_1x_3.

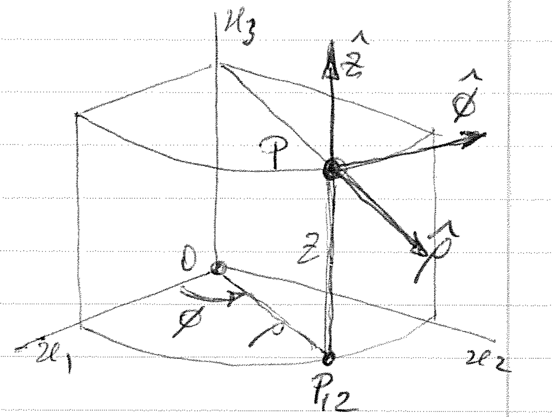
Neste caso simples de coordenadas cartesianas: $\alpha_1 = x_1$, $\alpha_2 = x_2$, $\alpha_3 = x_3$



Admite-se, numa situação genérica de coordenadas curvilíneas $\alpha_i(x_j)$, que as funções inversas $x_i(\alpha_j)$ são funções contínuas e unívocas.

- Coordenadas cilíndricas

As coordenadas cilíndricas de um ponto P são:



ρ: coordenada polar radial da projecção P_{12} do ponto P no plano Ox_1x_2 segundo uma orientação paralela a Ox_3.
$\rho \in [0, +\infty[$

ϕ: coordenada polar azimutal, medida no sentido directo, do eixo Ox_1 para a orientação OP_{12}, no plano Ox_1x_2. $\phi \in [0, 2\pi]$

z: cota do ponto P relativamente ao plano Ox_1x_2.
$z \in]-\infty, +\infty[$

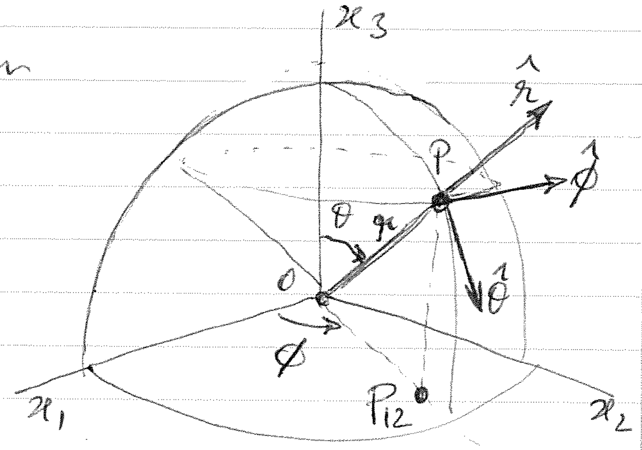
As superfícies coordenadas cuja intersecção determina o ponto $P(\rho, \phi, z)$ são:

- superfície cilíndrica de raio ρ e eixo x_3x_3.
- semi-plano contendo o eixo x_3x_3, orientado angularmente segundo ϕ em relação ao semi-plano Ox_1x_3.
- plano paralelo a Ox_1x_2, à cota z.

Verificam-se as seguintes relações $x_i(\alpha_j)$ e $\alpha_i(x_j)$ entre coordenadas cilíndricas e cartesianas:

$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\phi \\ x_2 = \rho\sin\phi \\ x_3 = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x_1^2+x_2^2} \\ \phi = \arctan(x_2/x_1) \\ z = x_3 \end{cases}$$

- Coordenadas esféricas



As coordenadas esféricas de um ponto P são:

r: distância da origem O ao ponto P. $r \in [0, +\infty[$

θ: ângulo medido no plano definido pelo eixo x_3x_3 e o ponto P, medido do semi-eixo positivo de x_3x_3 para a semi-recta OP.
$\theta \in [0, \pi]$

ϕ: coordenada polar azimutal, medida no sentido directo no plano Ox_1x_2, do semi-eixo positivo x_1x_2 para a orientação OP_{12}, em que P_{12} é a projecção de P no plano Ox_1x_2 segundo uma paralela a x_3x_3.
$\phi \in [0, 2\pi]$.

As superfícies coordenadas cuja intersecção determina o ponto $P(r, \theta, \phi)$ são:

- superfície esférica centrada em O e de raio r
- superfície cónica com vértice em O, eixo em Ox_3 ($x_3 > 0$) e semi-abertura angular θ
- semi-plano contendo o eixo x_3x_3, orientado angularmente segundo ϕ em relação ao semi-plano Ox_1x_3

As relações $x_i(\alpha_j)$ e $\alpha_i(x_j)$ entre coordenadas esféricas e cartesianas são as seguintes:

$$\begin{cases} x_1 = r\sin\theta\cos\phi \\ x_2 = r\sin\theta\sin\phi \\ x_3 = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} \\ \theta = \arccos\left(x_3/\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\right) = \\ \quad = \arctan\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}/x_3\right) \\ \phi = \arctan(x_2/x_1) \end{cases}$$

A.6. Linhas coordenadas. Versores coordenados.

As linhas coordenadas são as intersecções de pares de superfícies coordenadas. Assim, em cada ponto P, existem três linhas coordenadas designadas por (1), (2), (3), que resultam, respectivamente, da:

(1): intersecção das superfícies α_2 = constante 2 e α_3 = constante 3, contendo o ponto P

(2): intersecção das superfícies α_1 = constante 1 e α_3 = constante 3, contendo o ponto P

(3): intersecção das superfícies α_1 = constante 1 e α_2 = constante 2, contendo o ponto P.

Assim, ao longo de uma linha coordenada, só varia uma das coordenadas: em (i), varia a coordenada i.

Exemplos:

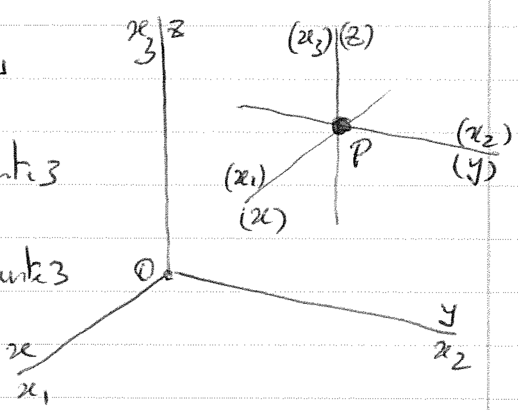
– Coordenadas cartesianas

As linhas coordenadas são rectas

(x), (x_1): intersecção dos planos
$x_2 = y =$ constante 2, $x_3 = z =$ constante 3

(y), (x_2): idem,
$x_1 = x =$ constante 1, $x_3 = z =$ constante 3

(z), (x_3): idem,
$x_1 = x =$ constante 1, $x_2 = y =$ const. 2

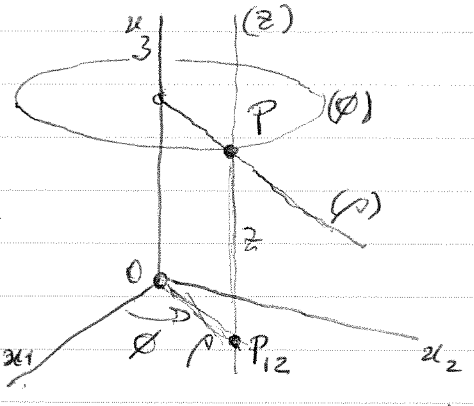


– Coordenadas cilíndricas

As linhas coordenadas são:

(ρ): intersecção do semi-plano
ϕ = constante ϕ, plano z = constante z

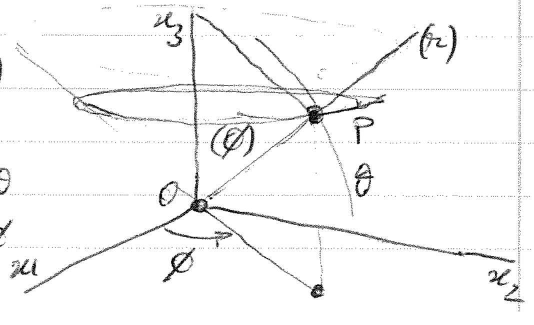
(ϕ): circunferência de intersecção da superfície cilíndrica ρ = constante ρ com o plano z = constante z



(z): recta de intersecção da superfície cilíndrica ρ = const. ρ com o semi-plano ϕ = const. ϕ

– Coordenadas esféricas

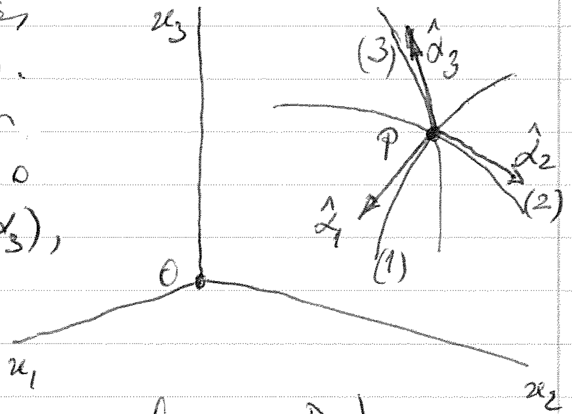
(r): semi-recta (contendo O e P) definida pela intersecção da superfície cónica θ = const. θ com o semi-plano ϕ = const. ϕ



(θ): semi-circunferência de raio r, definida pela intersecção da superfície esférica $r = \text{const.}\,r$ com o semi-plano $\phi = \text{const.}\,\phi$

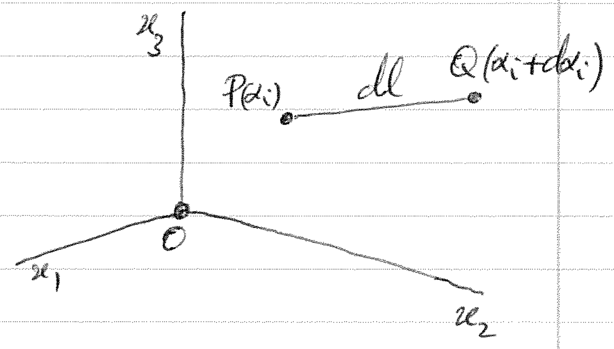
(ϕ): circunferência de raio $r\sin\theta$, resultante da intersecção da superfície esférica $r = \text{const.}\,r$ com a superfície cónica $\theta = \text{const.}\,\theta$.

Em cada ponto P, define-se os versores coordenados $\hat{\alpha}_i$ como versores normais às superfícies coordenadas $\alpha_i = \text{const.}\,i$, orientados no sentido dos valores crescentes de α_i. Os versores $\hat{\alpha}_i$ são, portanto, tangentes à respectiva linha coordenada (α_i). Note-se que os versores $\hat{\alpha}_i$ variam em orientação, geralmente, com o ponto P, ou seja, $\hat{\alpha}_i = \hat{\alpha}_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, sendo por definição $|\hat{\alpha}_i| = 1$.



A.7. Métrica em coordenadas curvilíneas. Distância entre pontos.

A distância dl entre dois pontos próximos, $P(\alpha_i)$ e $Q(\alpha_i + d\alpha_i)$, pode escrever-se em termos das variações dx_i das coordenadas x_i desses pontos. Assim:



$$dl^2 = \sum_{i=1}^{3} dx_i^2$$

Como $x_i = x_i(\alpha_j)$, vem (simplificando a notação dos somatórios): $dx_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} d\alpha_j$. Resulta:

$$dl^2 = \sum_{i,j,k} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k} d\alpha_j\, d\alpha_k$$

Definindo:

$$\boxed{g_{jk}(P) = g_{kj}(P) = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k}}$$

vem:

$$\boxed{dl^2 = \sum_{j,k} g_{jk}\, d\alpha_j\, d\alpha_k}$$

Ou, usando a "convenção dos índices mudos" para exprimir simplificadamente o somatório (índices repetidos indicam automaticamente soma sobre esses índices):

$$\boxed{dl^2 = g_{jk}\, d\alpha_j\, d\alpha_k}$$

As quantidades g_{jk} são os elementos de um tensor simétrico ($g_{jk} = g_{kj}$) de 2ª ordem, designado por tensor métrico:

$$[g_{jk}] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}$$

Considere-se, novamente, os seguintes casos exemplificativos importantes:

— Coordenadas cartesianas $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$:

Vem imediatamente que $\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j}, \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k} = \begin{cases} 1, & i = j,k \\ 0, & i \neq j,k \end{cases}$

Donde: $g_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$

Assim, o tensor métrico é diagonal: $[g] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ em coordenadas (x, y, z).

— Coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z):

Neste caso: $\frac{\partial x_1}{\partial \rho} = \cos\phi$; $\frac{\partial x_1}{\partial \phi} = -\rho\sin\phi$; $\frac{\partial x_1}{\partial z} = 0$

$\frac{\partial x_2}{\partial \rho} = \sin\phi$; $\frac{\partial x_2}{\partial \phi} = \rho\cos\phi$; $\frac{\partial x_2}{\partial z} = 0$

$\frac{\partial x_3}{\partial \rho} = 0$; $\frac{\partial x_3}{\partial \phi} = 0$; $\frac{\partial x_3}{\partial z} = 1$

Donde: $g_{11} = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$

$g_{22} = \rho^2\sin^2\phi + \rho^2\cos^2\phi = \rho^2$

$g_{33} = 1$

$g_{12} = g_{21} = -\rho\cos\phi\sin\phi + \rho\cos\phi\sin\phi = 0$

$g_{13} = g_{31} = 0$

$g_{23} = g_{32} = 0$

Assim:

$$[g_{jk}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ em coordenadas ρ, ϕ, z.

— Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ):

Neste caso: $\frac{\partial x_1}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi$; $\frac{\partial x_1}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\phi$; $\frac{\partial x_1}{\partial \phi} = -r\sin\theta\sin\phi$

$\frac{\partial x_2}{\partial r} = \sin\theta\sin\phi$; $\frac{\partial x_2}{\partial \theta} = r\cos\theta\sin\phi$; $\frac{\partial x_2}{\partial \phi} = r\sin\theta\cos\phi$

$\frac{\partial x_3}{\partial r} = \cos\theta$; $\frac{\partial x_3}{\partial \theta} = -r\sin\theta$; $\frac{\partial x_3}{\partial \phi} = 0$

Donde: $g_{11} = \sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta = 1$

$g_{22} = r^2\cos^2\theta\cos^2\phi + r^2\cos^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^2\theta = r^2$

$g_{33} = r^2\sin^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^2\theta\cos^2\phi = r^2\sin^2\theta$

$g_{12} = g_{21} = \sin\theta\cos\phi \cdot r\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi\, r\cos\theta\sin\phi - r\sin\theta\cos\theta = 0$

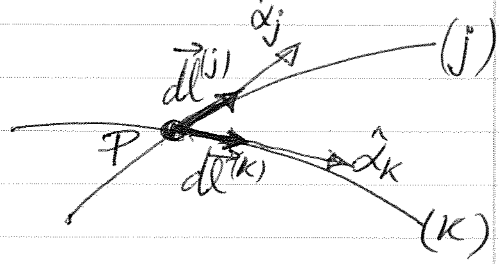
$g_{13} = g_{31} = \sin\theta\cos\phi \cdot r\sin\theta\sin\phi + \sin\theta\sin\phi \cdot r\sin\theta\cos\phi = 0$

$g_{23} = g_{32} = -r^2\cos\theta\cos\phi\sin\theta\sin\phi + r^2\cos\theta\sin\phi\sin\theta\cos\phi = 0$

Assim:

$$[g_{jK}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix} \quad \text{em coordenadas } (r, \theta, \phi)$$

O tensor métrico $[g_{jK}]$ pode ser calculado por um processo mais imediato. Para tal, considera-se o produto escalar $\vec{dl}^{(j)} \cdot \vec{dl}^{(K)}$ de dois vectores elementares das linhas coordenadas (j) e (K) no ponto P.



Como, numa linha coordenada (i) apenas varia a respectiva coordenada α_i, vem:

$$\vec{dl}^{(j)} = \vec{dl}^{(j)}\left(dx_1^{(j)}, dx_2^{(j)}, dx_3^{(j)}\right)$$

sendo $dx_i^{(j)} = \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} d\alpha_j$, e analogamente para $\vec{dl}^{(K)}$, vem:

$$\vec{dl}^{(j)} \cdot \vec{dl}^{(K)} = \sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} d\alpha_j\right)\left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_K} d\alpha_K\right) = g_{jK}\, d\alpha_j\, d\alpha_K$$

Para $j = K$: $(dl^{(j)})^2 = g_{jj}\, d\alpha_j^2$

Assim, o <u>comprimento de arco $dl^{(j)}$ ao longo da linha coordenada (j)</u> é:

$$\boxed{dl^{(j)} = \sqrt{g_{jj}}\; d\alpha_j}$$

Para $j \neq K$: $$\vec{dl}^{(j)} \cdot \vec{dl}^{(K)} = g_{jK}\, d\alpha_j\, d\alpha_K = dl^{(j)} dl^{(K)} \cos[\gamma((j),(K))] = \sqrt{g_{jj}\, g_{KK}}\, d\alpha_j\, d\alpha_K \cos[\gamma((j),(K))]$$

Assim, o ângulo γ entre os vectores elementares é tal que

$$\cos[\gamma((j),(K))] = \frac{g_{jK}}{\sqrt{g_{jj}\, g_{KK}}}$$

No caso de coordenadas curvilíneas ortogonais, $\gamma((j),(K)) = \pi/2$

e portanto, $g_{jk}=0$ para $j\neq k$, sendo o tensor métrico diagonal:

$$[g_{jk}]=\begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33}\end{bmatrix}$$

Considere-se os seguintes exemplos:

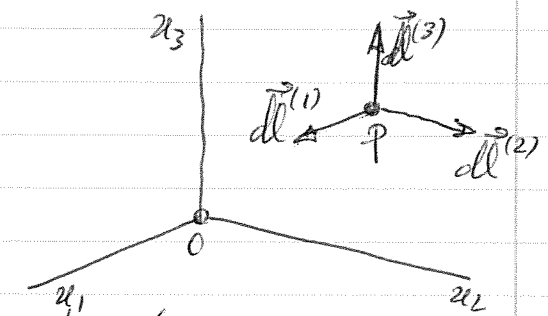
⇒ Coordenadas cartesianas ortonormadas (x_1, x_2, x_3):

Como evidentemente se tem:

$dl^{(1)}=dx_1$; $dl^{(2)}=dx_2$; $dl^{(3)}=dx_3$

resulta imediatamente:

$$[g_{jk}]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



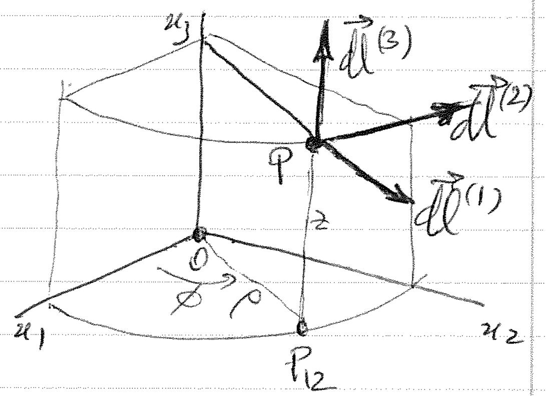
= Coordenadas cilíndricas ortonormadas (ρ, ϕ, z):

Neste caso, vem imediatamente:

$dl^{(1)}=d\rho$; $dl^{(2)}=\rho d\phi$; $dl^{(3)}=dz$

Donde:

$$[g_{jk}]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



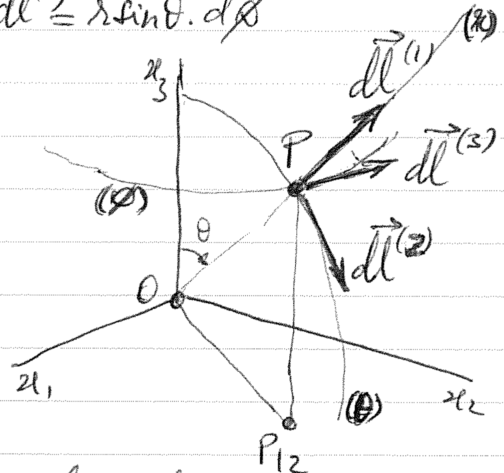
= Coordenadas esféricas ortonormadas (r, θ, ϕ):

sendo:

$$dl^{(1)}=dr \; ; \; dl^{(2)}=r\,d\theta \; ; \; dl^{(3)}=r\sin\theta . d\phi$$

vem:

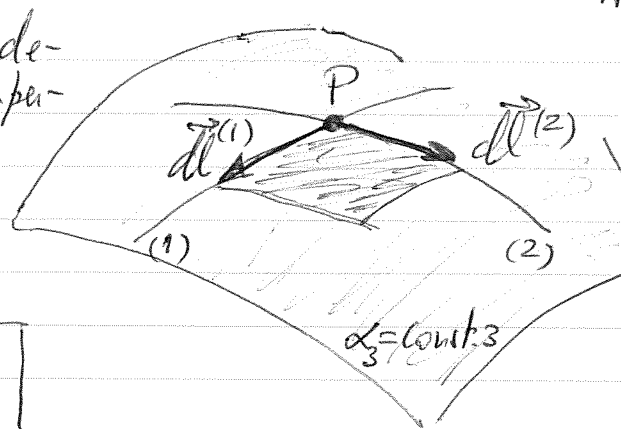
$$[g_{jk}]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta\end{bmatrix}$$



A.8. Elementos de superfície em coordenadas curvilíneas ortogonais

Seja, por exemplo, a superfície $\alpha_3=$ constante3 contendo o ponto P, e as linhas coordenadas (1) e (2) nessa superfície, como mostra a figura, contendo o ponto P. A menos de infinitésimos de ordem superior, é dada a ortogonalidade das linhas coordenadas, a área elementar na superfície $\alpha_3 = \text{const.}3$ vale:

$$dS^{(3)} = dl^{(1)}\, dl^{(2)} = \sqrt{g_{11}\, g_{22}}\, d\alpha_1\, d\alpha_2$$



Definindo: $\boxed{g = \sqrt{g_{11}\, g_{22}\, g_{33}}}$

vem: $dS^{(3)} = \left(\dfrac{g}{\sqrt{g_{33}}}\right) d\alpha_1\, d\alpha_2$, ou, genericamente, a área elementar $dS^{(i)}$ na superfície coordenada $\alpha_i = \text{const.}\, i$ escreve-se como

$$\boxed{dS^{(i)} = \frac{g}{\sqrt{g_{ii}}}\, d\alpha_j\, d\alpha_k} \qquad i,j,k = 1,2,3 \quad i \neq j \neq k$$

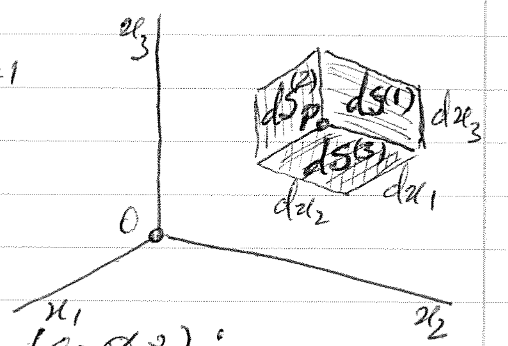
Sejam os seguintes exemplos, em que as áreas elementares $dS^{(i)}$ se podem calcular pela expressão anterior, mas que também se calculam de imediato a partir da geometria representada nas figuras respectivas.

- Coordenadas cartesianas ortonormadas (x_1, x_2, x_3):

$dS^{(1)} = dx_2\, dx_3$ $\qquad g = 1$

$dS^{(2)} = dx_1\, dx_3$ $\qquad g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$

$dS^{(3)} = dx_1\, dx_2$

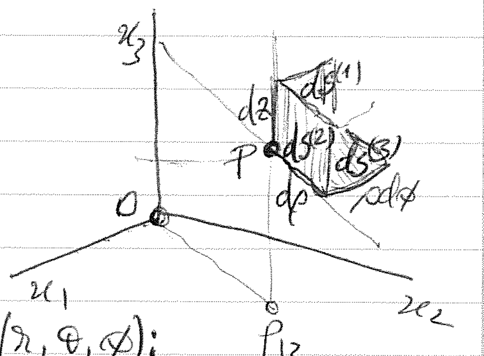


- Coordenadas cilíndricas ortonormadas (ρ, ϕ, z):

$dS^{(1)} = (\rho\, d\phi)(dz)$ $\qquad g = \rho$

$dS^{(2)} = (d\rho)(dz)$ $\qquad g_{11} = g_{33} = 1$

$dS^{(3)} = (d\rho)(\rho\, d\phi)$ $\qquad g_{22} = \rho^2$



- Coordenadas esféricas ortonormadas (r, θ, ϕ):

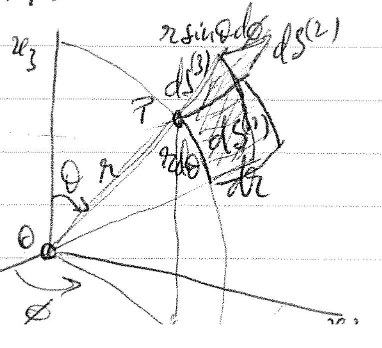
$dS^{(1)} = (r \sin\theta\, d\phi)(r\, d\theta) = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$ $\qquad g = r^2 \sin\theta$

$\qquad g_{11} = 1$

$dS^{(2)} = (r \sin\theta\, d\phi)(dr) = r \sin\theta\, dr\, d\phi$ $\qquad g_{22} = r^2$

$\qquad g_{33} = r^2 \sin^2\theta$

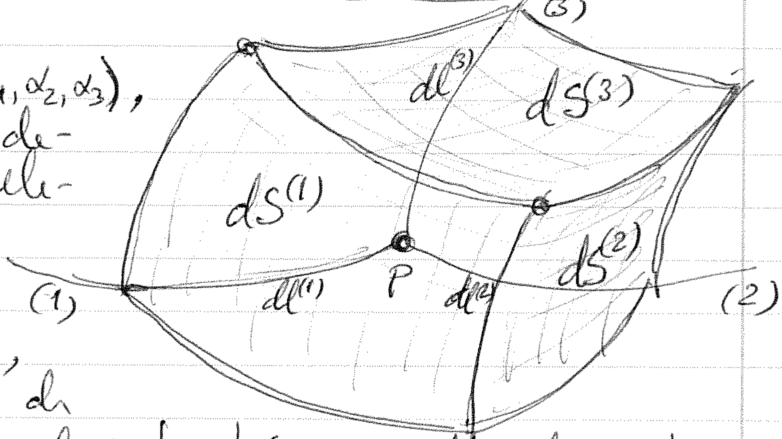
$dS^{(3)} = (r\, d\theta)(dr) = r\, dr\, d\theta$



Note-se que a área de uma superfície esférica Σ de raio $r=R$ se pode calcular como

$$S=\int_\Sigma dS^{(1)}=\int_0^\pi\int_0^{2\pi}R^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi=R^2\int_0^\pi\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\phi=4\pi R^2.$$

A.9. Elementos de volume em coordenadas curvilíneas ortogonais



Considerando o ponto $P(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, as respectivas linhas coordenadas (1), (2), (3) e os elementos de superfície $dS^{(1)}$, $dS^{(2)}$, $dS^{(3)}$ como representado na figura, define-se um elemento de volume que, a menos de infinitésimos de ordem superior, vale: $dv=dl^{(1)}\,dl^{(2)}\,dl^{(3)}$

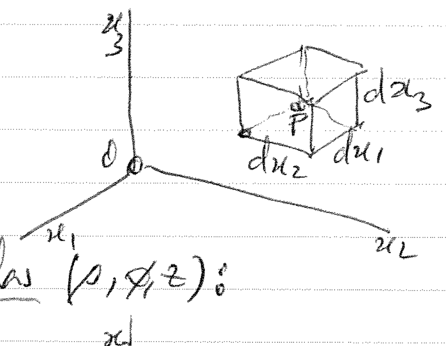
Donde:

$$\boxed{dv=\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}\;d\alpha_1\,d\alpha_2\,d\alpha_3=g\,d\alpha_1\,d\alpha_2\,d\alpha_3}$$

Novamente, pode obter-se dv imediatamente nos exemplos seguintes por inspecção das geometrias respectivas.

- Coordenadas cartesianas ortonormadas (x_1,x_2,x_3):

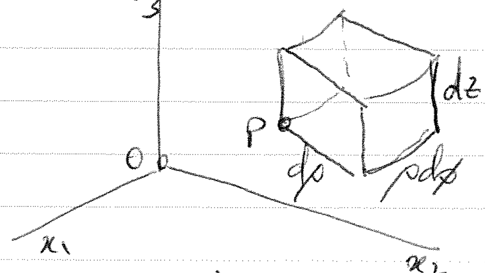
$dv=dx_1\,dx_2\,dx_3$ $\qquad g=1$



- Coordenadas cilíndricas ortonormadas (ρ,ϕ,z):

$g=\rho$

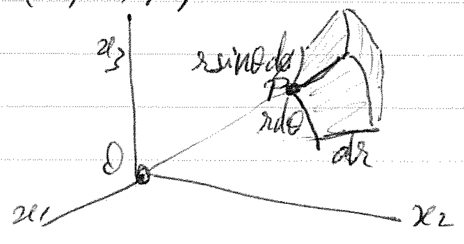
$dv=\rho\,d\rho\,d\phi\,dz$



- Coordenadas esféricas ortonormadas (r,θ,ϕ):

$g=r^2\sin\theta$

$dv=r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$



Note-se que o volume de uma esfera E de raio R pode calcular-se como:

$$V=\int_E dv = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\phi =$$

$$= \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{4}{3}\pi R^3$$

A.10. Tabelas

Os resultados apresentados nas secções anteriores podem ser condensados no seguinte quadro-resumo:

Sistema Coordenadas Ortonormadas	Coordenadas $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$	Tensor Métrico $[g_{ik}]$, $g=\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}$	Elemento Linha $dl^{(i)}=\sqrt{g_{ii}}\,d\alpha_i$	Elemento Área $dS^{(i)}=\frac{g}{\sqrt{g_{ii}}}d\alpha_j\,d\alpha_k$	Elemento Volume $dv=g\,d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3$
Coord. Cartesianas	(x_1,x_2,x_3) ou (x,y,z)	$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $g=1$	dx_1, ou dx dx_2, dy dx_3 dz	dx_2dx_3, ou $dydz$ dx_1dx_3 $dxdz$ dx_1dx_2 $dxdy$	$dx_1dx_2dx_3$, ou $dxdydz$
Coord. Cilíndricas	(ρ,ϕ,z)	$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\rho^2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $g=\rho$	$d\rho$ $\rho d\phi$ dz	$\rho\, d\phi\, dz$ $d\rho\, dz$ $\rho\, d\rho\, d\phi$	$\rho\, d\rho\, d\phi\, dz$
Coord. Esféricas	(r,θ,ϕ)	$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&r^2&0\\0&0&r^2\sin^2\theta\end{bmatrix}$ $g=r^2\sin\theta$	dr $r\,d\theta$ $r\sin\theta\, d\phi$	$r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi$ $r\sin\theta\, dr\, d\phi$ $r\, dr\, d\theta$	$r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$